JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS-SCIENCES

Publié sous la direction

de M. DE LONGCHAMPS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS

PUBLICATION FONDÉE EN 1877 PAR M. BOURGET

5me SÉRIE

VINGT-ET-UNIÈME ANNÉE



N° 1. — Janvier 1897.

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

SUR LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite*, 1896; p. 265)

28. — Lemme. *Toute droite passant par un des points d'intersection de deux circonférences les rencontre de nouveau en deux points dont les diamètres se coupent sous le même angle que lès circonférences.*

Soient B, C (*fig.* 13) les points où deux circonférences de centres O et O' sont rencontrées de nouveau par une droite contenant un de leurs points d'intersection A; l'angle BDC des deux diamètres BO, CO' sera égal à celui des deux rayons OA, $O'A$. En effet, le premier est supplémentaire de la somme des angles OBA, $O'CA$, et, le second, de celle des angles OAB, $O'AC$.

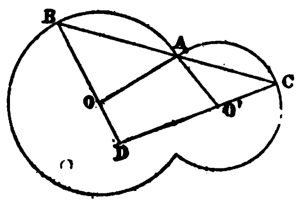


Fig. 13

Lorsque les deux circonférences seront orthogonales, les diamètres BO, CO' seront perpendiculaires entre eux.

29. — Lemme. *Si deux cercles en coupent un troisième orthogonalement et suivant des cordes parallèles, leurs centres de similitude coïncident avec ceux des cercles décrits sur ces cordes comme diamètres, la coïncidence se faisant d'un centre de similitude directe avec un sens de similitude inverse.*

Soient, sur une même droite, les centres O, C, C' (*fig.* 14) de trois circonférences dont la seconde et la troisième ont, pour rayons, les tangentes CA et $C'A'$ menées à la première. Il s'agit

de montrer que les centres de similitude des deux dernières circonférences s'appliquent sur ceux des cercles qui ont pour diamètres les cordes communes AB, $A'B'$.

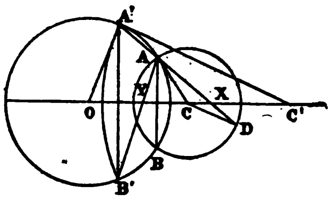


Fig. 14

Ces deux derniers centres de similitude se trouvent en X et Y, à la rencontre de CC' avec $A'A$ et avec AB'. Soit D le second point d'intersection de $A'A$ avec la circonférence de centre C; tirons CD et OA'.

D'après le lemme précédent appliqué aux deux circonférences de centres O et C et à la droite $A'D$, qui passe par un de leurs points d'intersection A, CD sera perpendiculaire à OA', et, par conséquent, parallèle à $C'A'$. Les rayons CD, $C'A'$ des deux circonférences de centres C et C' étant ainsi parallèles et dirigés en sens contraires, DA' contiendra le centre de similitude inverse de ces deux circonférences; il se trouvera donc en X. On démontrerait d'une manière analogue que le centre de similitude directe est en Y.

30. — *Si l'on décrit des circonférences ayant chacune pour diamètre la distance des centres de similitude de deux cercles bi-tangents, l'axe non focal de la conique sera l'axe radical commun de toutes ces circonférences prises deux à deux, et les foyers seront les nœuds de l'une quelconque d'entre elles par rapport à cet axe.*

Le point O étant le centre de la conique, F et F' les foyers, décrivons la circonférence de centre O et de rayon OF.

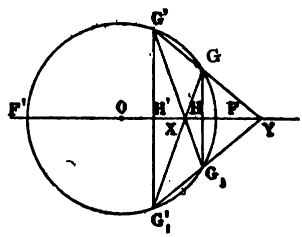


Fig. 15

Si la conique est une ellipse, en menant, par les centres H, H' (*fig.* 15) des deux cercles bi-tangents, les cordes GG_1, $G'G'_1$ perpendiculaires à FF', et joignant leurs extrémités, nous obtiendrons, en X, Y, les centres de similitude, car les rayons des deux cercles sont proportionnels à HG, $H'G'$ [**18**]. Or, d'après ces constructions, Y est la polaire

de X par rapport à la circonférence $FGG'F'$; donc X, Y sont conjugués harmoniques de F, F'. De là résultent les conséquences suivantes : on a $OX.OY = c^2$; la circonférence $FGG'F'$ coupe orthogonalement le cercle qui serait décrit sur XY comme diamètre et tous les cercles analogues ; les tangentes menées de O à ces cercles sont égales à c; pris deux à deux, ils ont, pour axe radical, la perpendiculaire élevée en O sur FF'; enfin, par rapport à cette perpendiculaire, les nœuds de l'un quelconque d'entre eux sont F et F'. On peut encore remarquer que le rayon de chacun de ces cercles est moyenne proportionnelle entre les distances de son centre aux foyers.

Si la conique est une hyperbole, les rayons des cercles bi-tangents seront proportionnels aux tangentes HG, $H'G'$ (*fig.* 16) menées des centres H, H' à la circonférence décrite sur FF' comme diamètre [**18**], de sorte que les centres de similitude seront les mêmes que ceux des cercles de centres H,H' et de rayons HG, $H'G'$. Or, ces derniers coupant la circonférence $FGG'F'$ orthogonalement et suivant des cordes parallèles GG_1, $G'G'_1$, leurs centres de similitude coïncident avec ceux des cercles décrits sur ces cordes comme diamètres [**29**]. On se trouve ainsi ramené au cas précédent.

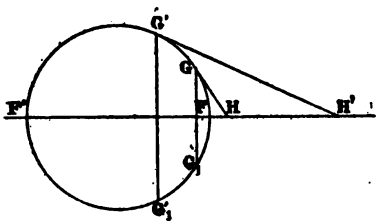


Fig. 16

Le foyer de la parabole est équidistant des centres de similitude de deux quelconques des cercles bi-tangents. En effet, F,F' (*fig.* 15) étant conjugués harmoniques de X, Y, si F' s'éloigne à l'infini, F se placera au milieu de XY.

31. — Etant donnée une moitié d'ellipse limitée par le petit axe, ou une branche d'hyperbole, ou une parabole, imaginons que le centre H d'un cercle bi-tangent, placé sur le prolongement de la droite qui joint le sommet A au foyer F, vienne à se déplacer en se dirigeant dans le sens FA. Le saillant S, conjugué harmonique de H par rapport à F, F' se dirigera en sens contraire, et la droite des contacts, polaire de S par rapport au cercle

principal, marchera à la rencontre de S, c'est-à-dire dans le même sens que H. La rencontre se fera en A, avant que H n'arrive au foyer ; on aura alors [22]

$$k = a, \quad h = \frac{c^2}{a}, \quad \tau = \delta = \frac{b^2}{a} = p,$$

p désignant le paramètre de la conique. Le cercle bi-tangent sera le cercle osculateur en A.

Ensuite, il n'y aura plus, à proprement parler, de cercle bi-tangent, puisque la droite sur laquelle devraient s'effectuer les contacts ne rencontrera plus ni le cercle ni la conique. Néanmoins, aux divers points de l'axe compris entre le centre du cercle osculateur et le foyer, correspondent encore des cercles, ou des droites, jouissant des propriétés ci-dessus établies ; nous allons maintenant nous occuper de ces cercles, parce qu'ils se présentent d'eux-mêmes dans la résolution et la discussion des problèmes sur les cercles bi-tangents aux coniques. (*A suivre*).

DEUX PROBLÈMES GÉNÉRAUX
DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Par M. **Ch. Michel**, élève à l'École Normale supérieure.

Considérons un couple de points A_n et B_n. Si P et Q sont deux points du plan, nous désignerons par ω_n l'angle aigu des droites A_nP et B_nQ et par λ_n le rapport des longueurs A_nP et B_nQ.

On peut résoudre par une méthode très simple le problème général suivant :

I. — *Étant donnés trois couples de points* A_1 *et* B_1, A_2 *et* B_2, A_3 *et* B_3, *trouver deux points* P *et* Q, *connaissant les nombres* ω_1 *et* λ_1 *et deux quelconques des quatre autres nombres* ω_2 *et* λ_2, ω_3 *et* λ_3. — Chacun des couples peut se réduire à un point double et les deux couples A_2 et B_2, A_3 et B_3 peuvent être confondus.

Supposons le problème résolu, et construisons le triangle $B_1Q\alpha_2$, semblable au triangle A_1PA_2 et semblablement orienté. L'angle des droites A_1A_2 et $B_1\alpha_2$ est égal à ω_1 et le rapport des longueurs A_1A_2 et $B_1\alpha_2$ est égal à λ_1. La position du point α_2 est donc connue. Il y a quatre positions du point α_2.

La droite α_3Q fait avec la droite A_2P l'angle ω_1 ; d'ailleurs, la droite B_2Q fait avec cette même droite l'angle ω_2. Donc, l'un des angles θ_2 des deux droites α_2Q et B_2Q est égal à la somme ou à la différence des angles ω_1 et ω_2.

D'autre part, on a

$$\frac{A_2P}{\alpha_2Q} = \lambda.$$

Mais

$$\frac{A_2P}{B_2Q} = \lambda_2 ;$$

par suite

$$\rho_2 = \frac{\alpha_2Q}{B_2Q} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

De même, construisons le triangle $B_1Q\alpha_3$, semblable au triangle A_1PA_3 et semblablement orienté. L'angle θ_3 des droites α_3Q et B_3Q est égal à la somme ou à la différence des angles ω_1 et ω_3, et l'on a

$$\rho_3 = \frac{\alpha_3Q}{B_3Q} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}.$$

Il y a quatre positions du point α_3 ; mais, à une position du point α_2, correspond une seule position du point α_3.

On voit ainsi que si les deux nombres ω_1 et λ_1 et si deux des quatre nombres ω_2, λ_2, ω_3, λ_3 sont connus, deux des nombres θ_2, θ_3, ρ_2, ρ_3 le sont aussi. Un lieu de Q, si l'un des deux nombres θ_2 et θ_3 est donné, se compose de deux circonférences passant par les points B_2 et α_2 ou B_3 ou α_3, et, si c'est l'un des deux autres, d'une circonférence. Le point Q s'obtient en définitive par l'intersection de deux circonférences. On déduit bien facilement la position du point P de celle du point Q. Remarquons que tout point Q, ainsi obtenu, n'est pas nécessairement une solution du problème.

Un autre problème général est le suivant :

II. — *Étant donnés deux couples de points* A_1, B_1, *et* A_2, B_2, *trouver deux points* P *et* Q, *connaissant les nombres* ω_1 *et* λ_1, *l'un des nombres* ω_2 *et* λ_2 *et sachant que le point* Q *est sur une ligne donnée.*

On connaît encore dans ce problème l'un des deux nombres θ_2

et ρ_2 et ainsi un second lieu du point Q qui se compose ou d'une circonférence ou de deux circonférences.

Voici des cas particuliers qui ont déjà été traités par divers auteurs.

1° Supposons que les points A_1, B_1 soient confondus en un point O et que la ligne qui contient le point Q soit une circonférence, ayant le point O pour centre. Nous avons alors les deux problèmes suivants :

On donne deux points A_2 *et* B_2. *Un triangle* OPQ *tourne autour de son sommet* O *fixe, et l'on demande de placer ce triangle de façon que l'angle des droites* PA_1 *et* QB_1 *soit égal à un angle donné ou de façon que le rapport des longueurs* PA_1 *et* QB_1 *soit égal à un rapport donné.* Ce sont les deux problèmes dont M. Girardville a donné, ici même, en juillet 1893, une solution.

2° Supposons que le point P soit assujetti à être sur une droite passant par A_2. Alors Q est sur une droite connue passant par B_1. Supposons, d'autre part, que les points A_2 et B_2 soient confondus en un point O. On a alors le problème suivant qui constitue la question 2 477 du journal de M. Vuibert (année 1890):

On donne un angle et deux points A_1 *et* B_1 *sur les deux côtés de cet angle. Placer un segment* PQ *limité aux côtés de l'angle, de façon que le rapport* $\frac{A_1P}{B_1Q}$ *soit égal à une quantité donnée et que l'angle sous lequel on le voit, d'un point donné* O, *soit égal à un angle donné.*

3° Supposons enfin que A_1 et B_1 soient confondus en un point O et que P soit assujetti à être sur une droite passant par ce point. Alors Q est assujetti à être aussi sur une autre droite connue, passant par O, et l'on a l'énoncé de la question 2 494 du même journal (année 1890) :

On donne un angle et deux points A_2 *et* B_2 *dans son plan. Trouver un segment* PQ *de direction donnée, limité aux côtés de l'angle, et tel que l'angle des droites* A_2P *et* B_2Q *soit égal à un angle donné.*

RELATIONS MÉTRIQUES
ET TRIGONOMÉTRIQUES
ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES
DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **Lecocq**, ancien professeur au Lycée d'Avignon.

1. — On ne peut contester l'avantage d'un recueil de formules relatives au triangle, donnant, en fonction de ses côtés, les divers éléments qui en dépendent, tels que : hauteurs, bissectrices, médianes, rayons des cercles inscrit, circonscrit, ex-inscrits..., etc.

Dans le même ordre d'idées, il a paru intéressant et utile de rassembler les formules relatives au quadrilatère inscrit. On a été très sobre d'explications, et, le plus souvent, on n'a fait qu'indiquer la marche suivie pour les établir, afin de ne pas soustraire au lecteur le plus clair de son bénéfice, celui de les calculer lui-même.

Pour éviter des répétitions inutiles, on a complété parfois des séries de formules par l'adjonction de résultats ultérieurement justifiés ; une parenthèse et un renvoi servent, en ce cas, d'indication.

Le quadrilatère ABCD sera complété par les points de rencontre des côtés opposés, et par la troisième diagonale SQ.

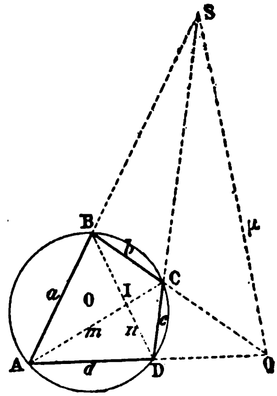


Fig 1.

On posera :

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d,$$

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 2p, \\ -a + b + c + d &= 2(p - a), \\ a - b + c + d &= 2(p - b), \\ a + b - c + d &= 2(p - c). \\ a + b + c - d &= 2(p - d), \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} AC = m, & h^2 = ab + cd, & \\ BD = n, & k^2 = ac + bd, & \text{d'où} \\ SQ = \mu, & l^2 = ad + bc, & \end{array} \left\{ \begin{array}{l} h^2 + k^2 = (a+d)(b+c), \\ h^2 - k^2 = (a-d)(b-c), \\ l^2 + k^2 = (a+b)(d+c), \\ l^2 + k^2 = (a-b)(d-c), \\ l^2 + h^2 = (a+c)(d+b), \\ l^2 - h^2 = (a-c)(d-b), \end{array} \right.$$

$$a + c - (d + b) = \varepsilon,$$

R, rayon du cercle circonscrit ;
S, surface du quadrilatère ;
f, la ligne qui joint les milieux des diagonales.

Les autres éléments seront désignés dans la suite, suivant leur ordre d'introduction.

Nota. — Les angles A, B, C, D, S, Q sont les angles intérieurs du quadrilatère et $\hat{I}$ désigne l'angle AID.

O centre du cercle circonscrit $\widehat{O} =$ SOQ.

Les figures sont établies dans les hypothèses

$$a > c, \quad d > b, \quad \text{et} \quad \varepsilon > 0.$$

Incidemment, on vérifiera les formules, en leur faisant exprimer les résultats géométriques connus sur les quadrilatères, propriétés qui figurent dans les traités de géométrie, ou dans les exercices qui y sont proposés.

Cette monographie n'est qu'une sorte de statistique de formules relatives au quadrilatère inscrit complet.

2. — Problème. *Déterminer la relation qui existe entre les troisièmes côtés de deux triangles qui ont un angle commun, en fonction des côtés qui comprennent cet angle.*

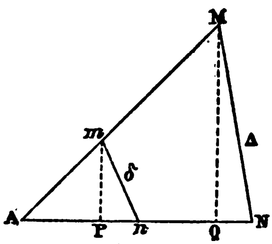


Fig. 2

Soit A l'angle commun aux deux triangles AMN et Amn.

Posons :

$$AM = B, \quad AN = C,$$
$$Am = b, \quad AN = c,$$
$$MN = \Delta, \quad mn = \delta ;$$

abaissons les perpendiculaires MQ et mP ; on a :

$$\begin{array}{l} \Delta^2 = B^2 + C^2 - 2C \times AQ \\ \delta^2 = b^2 + c^2 - 2c \times AP \end{array} \quad \text{d'ailleurs :} \quad \frac{AQ}{AP} = \frac{B}{b}$$

d'où, en éliminant AP et AQ,

$$bc\Delta^2 - BC\delta^2 = (Bb - Cc)(Bc - Cb).$$

Corollaire. — Si les droites MN et mn sont ou parallèles ou anti-parallèles, le second membre est nul, et l'on a, dans ce cas,

$$bc\Delta^2 = BC\delta^2.$$

Observation. — Si les côtés B, C et b, c de deux triangles comprennent des angles supplémentaires, la relation des troisièmes côtés devient

$$bc\Delta^2 + BC\delta^2 = (Bb + Cc)(Bc + Cb).$$

Application (*fig.* 1). — Cette dernière formule appliquée aux couples d'angles supplémentaires B et D ou A et C, donne :

$$h^2m^2 = k^2l^2,$$
$$l^2n^2 = k^2h^2;$$

d'où

$$mn = k^2, \quad \text{et} \quad \frac{m}{n} = \frac{l^2}{h^2}.$$

3. — PROBLÈME. *Connaissant les côtés de deux triangles* ABC *et* ADC *situés de part et d'autre du côté commun* AC, *calculer la distance* BD.

Soient a, b, c, d, les côtés du quadrilatère considéré ABCD et m, n ses diagonales ; abaissons les perpendiculaires DP et BQ sur AC. On a :

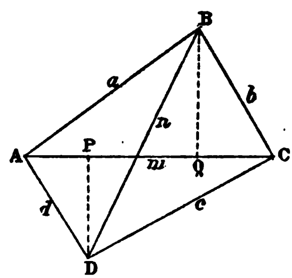


Fig. 3

$$AP = \frac{d^2 + m^2 - c^2}{2m},$$

$$CQ = \frac{b^2 + m^2 - a^2}{2m};$$

d'où

$$PQ = \frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2m}.$$

$$n^2 = \overline{PQ}^2 + \left(\frac{2ABC}{m} + \frac{2ADC}{m}\right)^2 = \overline{PQ}^2 + \frac{4(ABCD)^2}{m^2},$$

et

$$4m^2n^2 = (a^2 + c^2 - b^2 - d)^2 + 16S^2,$$

S désignant l'aire du quadrilatère.

Application. — Soit : $mn = ac + bd$, on trouvera :

$$16S^2 = 4(ac + bd)^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2$$
$$= 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d).$$

4. — *Théorème de Ptolémée.* — Prenons AE = CD et menons EF parallèle à AD jusqu'à la diagonale AC.

Le triangle AEF est égal à BCD ; achevons le parallélogramme AEFL et faisons l'angle $\widehat{BCG} = \widehat{ACD}$.

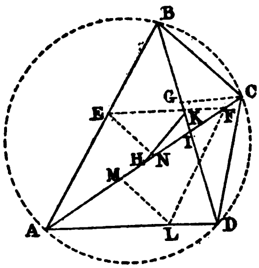


Fig. 4

Prenons aussi FN = BG ; on aura AN = DG et menons LM parallèle à EN.

Les triangles FEN et AEN sont respectivement égaux à BCG et DCG ; les quadrilatères EBCN et LDMC sont inscriptibles, et l'on en déduit :

$$ac = m\text{AN},$$
$$bd = m\text{AM};$$

d'où

$$ac + bd = m(\text{AM} + \text{AN}) = m(\text{BG} + \text{GD}) = mn.$$

5. — *Distances, aux quatre sommets, du point de rencontre* I *des diagonales.*

On mènera par I des parallèles à DA et BA et l'on obtiendra

$$\frac{\text{IA}}{ad} = \frac{\text{IB}}{ba} = \frac{\text{IC}}{cb} = \frac{\text{ID}}{dc} = \frac{k}{hl}.$$

Soient H et K les milieux des diagonales, on trouve

$$\text{HI} = \frac{m(ad - bc)}{2l^2}, \quad \text{KI} = \frac{n(cd - ab)}{2h^2};$$

d'où $$f^2 = \frac{ac(d^2 - b^2)^2 + bd(a^2 - c^2)^2}{4h^2l^2}.$$

On trouvera aussi :

$$\overline{\text{IA}}^2 + \overline{\text{IB}}^2 + \overline{\text{IC}}^2 + \overline{\text{ID}}^2 = \frac{k^2(a^2 + c^2)(d^2 + b^2)}{h^2l^2}$$

et, pour calculer deux côtés opposés, en fonction des deux autres et des diagonales, on a les formules :

$$a^2 = \frac{(mn - bd)(bn - dm)}{bm - dn}, \quad c^2 = \frac{(mn - bd)(bm - dn)}{bn - dm}.$$

(*A suivre*).

SUR UNE DIFFICULTÉ

DANS LA DISCUSSION DES INÉGALITÉS

Par M. **Elgé**.

Lorsqu'une inégalité

(1) $$f(a, b, c, \dots) > 0,$$

a lieu *quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres* a, b, c, ...; si l'une d'elles entre au second degré dans $f(a, b, c, \dots)$, la méthode élémentaire, indiquée partout, peut se résumer ainsi.

Ayant posé

$$f(a, b, c, \dots) = Aa^2 + 2Ba + C,$$

on observe que le trinôme en a doit rester invariable de signe; son discriminant $AC - B^2$ doit donc être *positif* quelles que soient les valeurs de b, c, ...; c'est une première vérification qui doit être faite tout d'abord. Puis, le signe étant invariable, il reste à reconnaître que A est toujours positif. On est ainsi ramené à discuter les deux inégalités

$$AC - B^2 > 0,$$
$$A > 0;$$

si celles-ci sont vérifiées pour toutes les valeurs des paramètres b, c, ...; alors (1) est une inégalité démontrée,

La difficulté que nous voulons signaler, difficulté qui se présente assez fréquemment, tient *aux restrictions* que l'on doit faire, dans certains cas, sur les valeurs attribuées aux lettres.

Prenons un exemple, pour mieux préciser cette difficulté.

On propose de démontrer que pour toutes les valeurs positives de a, b, c, *on a* (*)

(1) $$8abc < (a + b)(b + c)(c + a).$$

(*) *Nouvelle correspondance mathématique*, 1880, p. 140. On peut aussi déduire la propriété en question de l'identité

$$8abc + a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 = (a + b)(b + c)(c + a),$$

facile à vérifier.

Cette inégalité s'établit sans difficulté en observant (*loc. cit.*), que l'on a

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2},$$

$$\sqrt{bc} < \frac{b+c}{2},$$

$$\sqrt{ca} < \frac{c+a}{2},$$

et, par suite,

$$abc < \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}.$$

La démonstration suppose que a, b, c représentent trois quantités positives; les inégalités qui lui servent de base ne sont exactes, en effet, que dans cette hypothèse.

Mais, sans utiliser la considération que nous venons de rappeler, considération qui conduit au résultat cherché par une voie rapide et élégante, supposons qu'on veuille faire la discussion de l'inégalité (1), par la méthode classique, résumée au § **1**.

Nous serons alors conduit aux calculs suivants.

L'inégalité (1) peut s'écrire :

(2) $$a^2(b+c) + a(b^2+c^2-6bc) + bc(b+c) > 0.$$

Le discriminant Δ du trinôme, est

$$\Delta = -(b^2+c^2-bc)^2 + 4bc(b+c).$$

On a, d'ailleurs, par une transformation facile,

(3) $$\Delta = -(b^2-14bc+c^2)(b-c)^2.$$

Cette quantité Δ n'est pas *toujours* positive; le premier membre de (2) n'est donc pas *toujours* d'un signe invariable.

On observera d'abord, pour établir que l'inégalité (1) a lieu *pour les valeurs positives de a, b, c,* que le coefficient de a^2, la quantité $b+c$, est positive.

Le théorème en question sera donc démontré si, dans la même hypothèse, a, b, c *positifs*, on fait voir que Δ est positif. Si les racines de l'équation en a

(4) $$a^2(b+c) + a(b^2+c^2-6bc) + bc(b+c) = 0$$

sont imaginaires, Δ est certainement positif; mais nous supposons, au contraire, qu'elles sont *réelles* et *positives*. Le produit

est positif et égal à bc ; la somme est

$$\frac{6bc - b^2 - c^2}{b + c};$$

elle doit être positive. Le dénominateur étant positif, on doit avoir

$$6bc - b^2 - c^2 > 0.$$

En supposant que cette condition soit remplie, que b, c varient arbitrairement, mais par valeurs positives, on a, *a fortiori*

$$b^2 + c^2 < 14bc.$$

Ainsi Δ est positif et, par suite, les racines de (4) sont imaginaires. L'inégalité (2) se trouve ainsi vérifiée ; mais pour les valeurs positives de a, b, c, uniquement.

SECONDE NOTE

SUR LES CERCLES RADICAUX ET ANTI-RADICAUX

Par M. **Juan J. Duran-Loriga**
Commandant d'Artillerie à la Corogne.

Dans l'article précédent (*), nous avons considéré la circonférence radicale comme le lieu géométrique des points tels que leurs puissances par rapport à deux cercles fixes (O) et (O') soient égales et de signes contraires ; nous avons vu que le susdit cercle a pour centre le milieu du segment qui joint les centres des circonférences en question, et que son rayon ρ était donné par la formule

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2) - d^2}.$$

On comprend bien la possibilité de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire, étant données deux circonférences (O) et (ρ), trouver une autre circonférence qui, jointe à (O), ait pour circonférence radicale (ρ) que nous appelons *circonférence anti-radicale de* (O) *par rapport à* (ρ) ; mais avant d'entrer dans cette investigation, nous amplifierons un peu ce que nous avons dit par rapport aux circonférences radicales dans l'étude précitée.

(*) Voyez J. E. 1896, p. 78.

Il faut remarquer, d'abord, que les deux circonférences données et la circonférence radicale faisant partie d'un faisceau de cercles, étant posé que les trois circonférences appartiennent à un système coaxial, elles auront les propriétés de ces systèmes et l'on pourrait faire dériver leur étude de la géométrie projective, bien que nous ayions voulu la présenter sous une forme plus élémentaire.

La considération de circonférences radicales nous permet la discussion des rapports des coefficients pour que deux circonférences soient orthogonales, prenant comme fondement, que si deux cercles sont orthogonaux, la circonférence radicale passe par leurs centres et *réciproquement*. On vérifiera donc dans le cas d'orthogonalité cette condition nécessaire et suffisante, que les coordonnées du centre d'un des cercles vérifient l'équation du cercle radical.

Soient les équations des cercles orthogonaux

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0;$$

le cercle radical a pour équation

$$2(x^2 + y^2) + 2(A + A')x + 2(B + B')y + C + C' = 0,$$

les coordonnées du centre d'un des cercles, (par exemple, du premier) sont : — A et — B, et par suite on a

$$2(A^2 + B^2) - 2(A + A')A - 2(B + B')B + C + C' = 0,$$

qui se réduit à la relation connue

$$2(AA' + BB') = C + C'.$$

Lorsque les équations des cercles sont écrites en coordonnées barycentriques, ce procédé permettra facilement de rechercher si deux cercles sont orthogonaux, surtout quand on connait *a priori* les coordonnées du centre d'un des susdits cercles. Proposons-nous par exemple, de démontrer que le cercle de Longchamps (voyez J. S., 1886 p. 57) est orthogonal par rapport aux cercles potentiels. Nous appelons *cercles potentiels* ceux qui sont décrits des milieux des côtés comme centres avec des rayons égaux aux médianes correspondantes (voyez P. M. vol. v, p. 70), nous avons en effet :

Équation du cercle de Longchamps

$$(\alpha + \beta + \gamma)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0.$$

Équation du cercle potentiel (P_a)

$$-p_a(\alpha + \beta + \gamma)(\beta + \gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0.$$

Équation du cercle radical

$$(\alpha+\beta+\gamma)(a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma-p_a\beta-p_a\gamma)-2(a^2\beta\gamma+b^2\alpha\gamma+c^2\alpha\beta)=0.$$

Nous avons appelé p_a la quantité

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

Comme le centre de (P_a) est le milieu du côté a, ses coordonnées barycentriques sont représentées par $\alpha = 0$ et $\beta = \gamma$, et par conséquent

$$2\beta(b^2\beta + c^2\beta - 2p_a\beta) - 2a^2\beta^2 = 0, \text{ etc., etc.}$$

Si l'une des circonférences se réduit à un cercle-point, la circonférence radicale aura pour rayon

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}$$

et lorsque les deux cercles restent réduits à des cercles-points, la circonférence radicale sera toujours imaginaire et aura pour rayon

$$\rho = \frac{d}{2}\sqrt{-1}.$$

Il faut observer que l'on peut généraliser la notion de cercle radical lorsque le rapport des puissances a une valeur $\frac{m}{n}$.

Tous les cercles ainsi obtenus font partie d'un faisceau de cercles ayant beaucoup de propriétés communes.

Le théorème classique : *si l'on a trois cercles et qu'on les combine deux à deux, l'axe radical des circonférences radicales de deux groupes l'est du troisième*, sera également évident quoique la notion de cercle radical soit généralisée et par conséquent :

Si l'on a trois circonférences et que l'on trace les radicales de deux groupes, quel que soit le rapport des puissances, tous ces cercles font partie du même faisceau.

Nous dirons finalement, que l'on peut étendre la notion de cercle radical aux sphères et aux cercles tracés sur une surface sphérique. (*A suivre*).

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir 1896, page 271)

SECONDE MÉTHODE D'ARCHIMÈDE

Cette méthode, qui a été appelée *par échelons*, a servi à Archimède à mesurer les *conoïdes*, les *sphéroïdes* et l'*hélice* (*). Elle consiste principalement à diviser la surface, ou le corps à mesurer, par des droites ou des plans parallèles et équidistants et à construire sur chaque section, comme base, deux rectangles ou prismes, l'un inscrit à la figure, l'autre circonscrit. Si l'on connaît la loi qui régit la grandeur des sections, en fonction de leur distance à la base inférieure, en additionnant les deux séries de rectangles ou de prismes, on aura deux limites de la grandeur cherchée, l'une en dessus, l'autre en dessous. La différence de ces deux limites peut devenir aussi petite qu'on veut, en augmentant le nombre des sections ; pourvu toutefois que celles-ci soient toujours croissantes ou toujours décroissantes, de la base au sommet. Donc, si l'on sait trouver la somme des sections équidistantes et la limite vers laquelle tend cette somme, on aura, par là même, la surface ou le volume cherché.

Archimède n'applique pas cette méthode aux surfaces, mais cette extension est si naturelle qu'on peut la considérer comme s'étant présentée en même temps à l'auteur de la méthode. Il en a donné une autre extension à la quadrature des courbes déterminées par une relation entre leurs coordonnées polaires. Nous en parlerons plus loin.

Le principe de la première méthode d'Archimède n'était en somme qu'un théorème sur les limites et les ingénieuses applications qu'il en a faites ne pouvaient guère suggérer une méthode

(*) Il nomme ainsi ce que nous appelons aujourd'hui *paraboloïde* et *hyperboloïde de révolution*, *ellipsoïde de révolution* et *spirale d'Archimède*.

générale. La seconde, au coutraire, est éminemment suggestive : elle devait conduire à la conception de la géométrie analytique — par la représentation graphique des valeurs d'une fonction continue au moyen d'abscisses et d'ordonnées, — quand les idées se furent tournées vers l'analyse et qu'on se fut attaché à perfectionner le calcul algébrique. Elle est l'origine immédiate du calcul intégral. Aussi, à cause de sa fécondité, a-t-elle été plus prisée et plus étudiée que la première, qui néanmoins est beaucoup plus remarquable encore, à cause de la plus grande difficulté du sujet et des moyens simples et variés qu'il y met en jeu.

Voici un extrait de son traité des conoïdes et des sphéroïdes.

I. — *Considérons un nombre quelconque de quantités se surpassant également d'une quantité égale à la plus petite : la plus grande, répétée un même nombre de fois est plus petite que le double de la somme de ces quantités et plus grande que le double de ces mêmes quantités sauf la plus grande.*

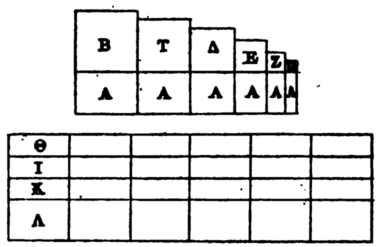


Fig. 14

III. — *Les côtés des carrés* B, Γ,... (*fig.* 14) *se surpassant également d'une longueur égale à celle du plus petit, ajoutons-y des rectangles de mêmes bases que ces carrés et d'une hauteur égale* A. *Considérons un nombre égal de rectangles ayant la hauteur partagée en quatre parties* Θ, I, K, Λ, *telles que*

$$\Theta = \mathrm{I} = \frac{\mathrm{A}}{2},\ \mathrm{K} = \frac{\Lambda}{2} = \frac{\mathrm{B}}{3} : \textit{le rapport } \frac{\Theta + \mathrm{I} + \mathrm{K} + \Lambda}{\mathrm{I} + \mathrm{K}} \textit{ est com-}$$

pris 1° *entre celui de la surface de la seconde figure à celle de la première et* 2° *entre celui de la même figure et la première, en retranchant de celle-ci le carré* B *et le rectangle correspondant.*

Cet énoncé correspond à la relation

$$\frac{n(na + \mathrm{A})}{(a + \mathrm{A})\,a + (2a + \mathrm{A})\,2a + \ldots + (na + \mathrm{A})\,na} >$$

$$\frac{na + \mathrm{A}}{\frac{\mathrm{A}}{2} + \frac{na}{3}} > \frac{n(na + \mathrm{A})}{(a + \mathrm{A})\,a + \ldots + [(n - 1)\,a + \mathrm{A}](n - 1)\,a}.$$

Nous ne rapporterons pas la démonstration d'Archimède : on peut en prendre une idée J. S. 1895, p. 113, où nous traitons, d'après Archimède, un cas particulier de la précédente.

(F.) XXI. — *Considérons un segment de conoïde, ou bien un segment de sphéroïde plus petit que le demi-sphéroïde : on peut lui inscrire un solide et lui en circonscrire un autre tels que leur différence puisse être supposée plus petite qu'une grandeur donnée quelconque.* Soit le segment ABΓ (*fig.* 15) tournant autour de l'axe BΔ ; par des bissections de l'axe BΔ répétées un nombre suffisant de fois, on pourra toujours obtenir une série de cylindres extérieurs et une autre de cylindres intérieurs, comme l'indique la figure, et tels que la différence des deux solides soit dans la condition demandée, puisque cette différence est égale à celle des deux cylindres ayant pour rayons AΔ et ΘP, laquelle peut évidemment être rendue aussi petite qu'on veut.

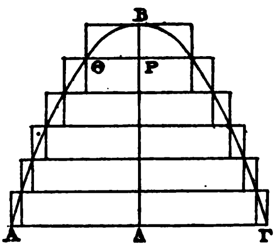


Fig. 15

Par la suite, nous désignerons sous le nom de *théorème d'Archimède* la très importante proposition que nous venons de rapporter, et dont la généralisation à un solide quelconque est immédiate, ainsi que son analogue pour les surfaces.

XXII. — Même théorème concernant un conoïde ou sphéroïde coupé obliquement à l'axe (*fig.* 16.

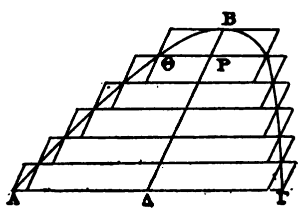


Fig. 16

XXIII. — *Un segment quelconque de conoïde rectangle ou parabolique vaut la moitié ψ du cylindre circonscrit.* Supposons le segment > ψ : circonscrivons et inscrivons comme dans (F) deux solides (*fig.* 17) dont la différence soit plus petite que l'excès du segment sur ψ, *a fortiori*, le solide inscrit sera > ψ. Or, le cylindre inscrit correspondant au rectangle Ξ Z, par exemple,

est à celui produit par IIZ comme :

$$\frac{\overline{\Lambda Z}^2}{\overline{PZ}^2} = \frac{BZ}{B\Delta} = \frac{A\Delta}{\Omega Z}.$$

Donc, le cylindre total circonscrit au segment est au solide inscrit comme la somme des longueurs IIE, PZ,.. est à la somme des longueurs TE, ΩZ,... c'est-à-dire, à cause du principe I, plus grand que 2. Ainsi Ψ serait plus grand que le solide inscrit, conclusion contradictoire avec ce qu'on a supposé tout à l'heure.

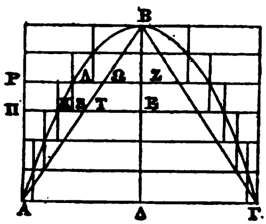


Fig. 17

Supposons le segment $< \Psi$; on peut supposer que l'excès du solide circonscrit sur le solide inscrit est inférieur à celui de Ψ sur le segment. On en conclut que le solide circonscrit est $< \Psi$. On fera voir, comme tout à l'heure, que le cylindre inscrit est au solide circonscrit comme la somme des droites AΔ, IIE, PZ,... à celle des droites AΔ, TE, ΩZ,..., c'est-à-dire > 2. Ainsi on aurait Ψ plus petit que le solide circonscrit, ce qui contredit la supposition.

XXXIV. — Même théorème pour un segment coupé obliquement.

XXVII, XXVIII, XXIX. — Théorèmes analogues pour les segments droits ou obliques du conoïde obtus angle ou hyberbolique et du sphéroïde. La démonstration est tout à fait semblable à celle de XXXIII, sauf qu'elle emploie le théorème III au lieu du théorème I (*).

* Il y aurait lieu de s'étonner qu'Archimède n'ait pas employé pour quarrer la parabole le théorème I, qui menait plus naturellement à cette quadrature qu'à la cubature du paraboloïde, si on ne s'apercevait, par la lecture de ses œuvres, que la découverte de cette quadrature a précédé celle de la cubature des conoïdes. Il a dû la découvrir, fortuitement, par la statique, essayer d'appliquer sa méthode aux sections coniques et imaginer les conoïdes pour lesquels il a reconnu le besoin de nouvelles méthodes. L'ordre dans lequel ses découvertes ont été faites — ou tout au moins divulguées, — paraît être le suivant : centres de gravité, quadrature de la parabole, cylindre et sphères, hélices, conoïdes et sphéroïdes.

Les mêmes principes sont employés par Archimède pour la mesure de l'hélice. En effet, à la courbe AD (*fig.* 18), menons des rayons OA, OB,... faisant des angles égaux entre eux, et décrivons les arcs circulaires Aβ, aBγ, bCδ,... Si la courbe ne coupe qu'une fois chacun de ces arcs, la surface du secteur AOD est comprise entre celles des sommes des secteurs circulaires AOβ, BOγ, COδ et aOB, bOC, cOD. Or, la différence de ces deux sommes, qui est égale à surf. $a\beta$ — surf. $c\delta$, peut être rendue aussi petite que possible, en bissectant successivement les angles en O, et en répétant la même opération.

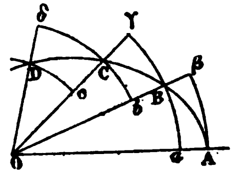


Fig. 18

Dans l'hélice, les rayons sont en progression arithmétique; par suite, les secteurs circulaires représentent les carrés des termes de cette progression. La surface de l'hélice s'obtiendra donc à l'aide du théorème III. (*A suivre*).

BIBLIOGRAPHIE

ARNAUDEAU (A.), ancien Élève de l'École Polytechnique, Membre agrégé de l'Institut des Actuaires français, Membre de la Société de Statistique de Paris. — *Projet de Table de triangulaires de 1 à 100 000*, suivie d'une *Table de réciproques* des nombres à cinq chiffres de 1 à 100 000 et d'une *Table de sinus et tangentes naturels* variant de 30″ en 30″, de 0° à 90°, avec texte explicatif. Grand in-8 de xx-41 pages; 1896. **2** fr.

Ces tables présentent un intérêt général et même international en ce sens qu'elles sont destinées, dans la pensée de l'Auteur, aux écoles primaires et secondaires pour remplacer les logarithmes et la trigonométrie et permettre cependant de simplifier les calculs d'arithmétique et pouvoir se livrer à des mesures agraires.

Ces Tables sont calculées en entier et formeront un Volume de 538 pages numériques qui se vendra 15 fr., et dont la présente brochure n'est qu'un extrait et un spécimen.

MM. les Professeurs trouveront un attrait tout particulier à enseigner l'usage de ces Tables par suite de l'exactitude des résultats et du choix nombreux des triangulaires conduisant tous au même produit.

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1897 renferme des articles, dus aux savants les plus illustres, sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin, les Notices suivantes : *Notice sur le*

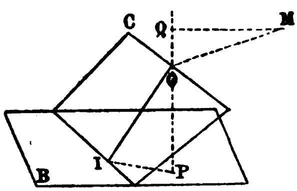
mouvement propre du système solaire; par M. F. Tisserand. — *Les rayons cathodiques et les rayons Röntgen;* par M. H. Poincaré. — *Les époques dans l'Histoire astronomique des planètes;* par M. Janssen. — *Notice sur la quatrième Réunion du Comité international pour l'exécution de la Carte photographique du Ciel;* par M. F. Tisserand. — *Notice sur les travaux de la Commission internationale des étoiles fondamentales;* par M. F. Tisserand. — *Discours prononcé aux funérailles de M. Hippolyte Fizeau;* par M. A. Cornu. — *Discours prononcés aux funérailles de M. Tisserand;* par MM. H. Poincaré, J. Janssen et M. Lœwy. — *Travaux au mont Blanc en 1896;* par M. J. Janssen. In-18 de v-918 pages avec 2 Cartes magnétiques. (Paris, Gauthier-Villars et fils, **1 fr. 50**).

QUESTION 697

Solution, par M. Goyens

On donne un plan et un point O *fixes. Par* O, *on mène un plan arbitraire et une perpendiculaire à ce plan. Sur cette droite, on prend des points à des distances de* O *égales à la distance du point* O *à l'intersection du plan arbitraire et du plan fixe. Quelle est la surface* (S) *lieu des points ainsi obtenus, lorsqu'on fait varier le plan arbitraire.* (Mannheim).

Solution. — Soient B le plan fixe, C le plan arbitraire, OP la perpendiculaire sur B. Le plan MOP est perpendiculaire aux plans B et C, donc à leur intersection; il coupera C suivant OI perpendiculaire à cette intersection. Soit MQ perpendiculaire sur OP.



697

$$\widehat{QOM} = 90^\circ - \widehat{POI} = \widehat{OIP}.$$

Donc les deux triangles rectangles MOQ et OPI sont égaux comme ayant l'hypoténuse OM = OI et un angle aigu égal; donc QM = OP = constante. Ainsi, le point M décrit un cylindre droit ayant QP pour axe et OP pour rayon.

Nota. — Solutions diverses par MM. Droz-Farny; Francis Dauzats, soldat au 51ᵉ de ligne; H. L'Huillier.

QUESTIONS PROPOSÉES

789. — Construire un triangle ABC, connaissant la différence d de deux côtés b, c, les longueurs de la médiane m_a et : soit la hauteur h relative au côté a, soit le rayon r du cercle inscrit.

(*A. Schiappa Monteiro*).

790. — Deux circonférences Δ, Δ' se coupent aux points A,B, la tangente à Δ, en A, coupe Δ' en C ; la tangente à Δ', en ce même point A coupe Δ en D. Soit D′ le symétrique de D par rapport à A. Démontrer que la circonférence CAD′ a son centre sur la perpendiculaire élevée en A, à AB. (*G. L.*)

791. — On considère un triangle ABC ; soient : G le point de Gergonne correspondant au cercle inscrit ; G_a, G_b, G_c ceux des cercles ex-inscrits.

1° La droite GG_a coupe BC en A′ : démontrer que AA′ et les droites analogues BB′,CC′ concourent au point réciproque du centre du cercle inscrit.

2° La droite G_bG_c rencontre BC en A″ ; le point A″ et les points analogues B″,C″ sont en ligne droite. (*G. L.*)

792. — On considère, sur une parabole P, un point A tel que la normale Δ, en ce point, soit inclinée de 45° sur l'axe de P ; Δ coupe P en un second point B. Soit M un point pris arbitrairement sur Δ.

1° La circonférence décrite sur AM comme diamètre coupe la parabole, abstraction faite de A, en deux points C,D situés sur une parallèle à Δ.

2° La droite CD touche la circonférence décrite sur MB comme diamètre. (*G. L.*)

Nota. — La question proposée sous le n° 786 est connue, comme nous le fait observer M. Boutin : Voyez Bos (*Éléments de Trigonométrie rutilique*, 2e édition, p. 176.)

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

SUR LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. A. Tissot

(*Suite*, 1897, page 3)

CERCLES BITANGENTS A CONTACTS IMAGINAIRES

32. — Reproduisons, sur la figure 17, les tracés et la notation de la figure 2, puis H_1 étant un des points dont nous venons de parler, répétons, en partant de H_1, les constructions que l'on a effectuées en partant de H, c'est-à-dire menons H_1D_1 perpendiculaire à la tangente arbitraire TU ; marquons Ω_1, Ω_1', V_1 et I_1, aux points où elle rencontre MF, MF′, MO et MP ; enfin, de V_1, abaissons, sur l'axe, la perpendiculaire V_1K_1, rencontrant MP en P_1 et MU en U_1,

Appelons Δ la droite U_1V_1, et Γ le cercle qui a pour centre H_1, et dont les nœuds, par rapport à TU, sont les points Ω_1, Ω'_1. Le rayon de ce cercle est la moyenne proportionnelle entre $H_1\Omega_1$ et $H_1\Omega'_1$ [7] ; sans modifier en rien un raisonnement qui a déjà été employé [18], on conclura de là que ce rayon est, avec la moyenne

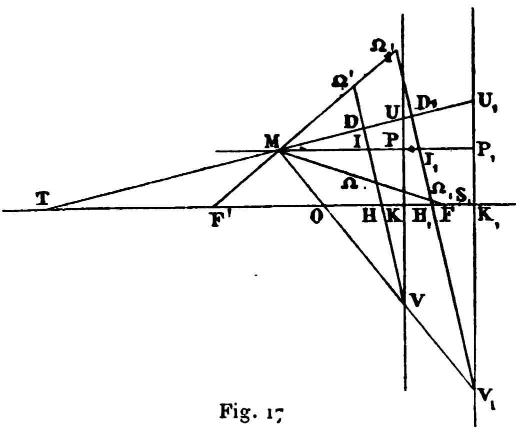


Fig. 17

proportionnelle entre H_1F et H_1F', dans le rapport de b à c.

33. — Les lignes OH_1, OK_1, H_1K_1 (*fig.* 17), sont proportionnelles aux lignes MI_1, MP_1, I_1P_1 ; celles-ci le sont aux lignes MI,

MP, IP, car le rapport de MI_1 à MI et celui de MP_1 à MP sont tous deux égaux au rapport de MV_1 à MV. D'un autre côté, les lignes MI, MP, IP sont proportionnelles à OH, OK, HK, par conséquent [**22**] à c^2, a^2, b^2. On a donc

$$\frac{c^2}{OH_1} = \frac{a^2}{OK_1} = \frac{b^2}{H_1K_1}.$$

34. — Soit S_1 (*fig.* 17), le conjugué harmonique de H_1 par rapport aux foyers, lequel se trouvera situé entre F et le sommet voisin; le premier des trois rapports ci-dessus sera égal à OS_1 ; donc, il en sera de même du second, et l'on aura

$$OK_1 \,.\, OS_1 = a^2,$$

ce qui prouve que la droite Δ est la polaire de S_1 par rapport au cercle principal. Elle l'est aussi par rapport à la conique, puisque la conique est bitangente à ce cercle et qu'ils ont, pour droite des contacts, l'axe sur lequel se trouve S_1 [**1**]. Enfin, elle l'est par rapport au cercle Γ; en effet, menons S_1G_1 (*fig.* 18) tangente à la circonférence de diamètre FF'; tirons H_1G_1, qui sera perpendiculaire à FF'; tirons aussi OG_1. Le point de rencontre de Δ avec l'axe étant toujours désigné par K_1, on aura [**33**]

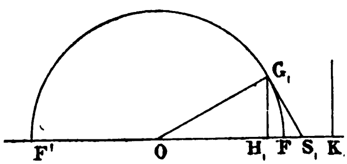


Fig. 18

$$H_1K_1 = \frac{b^2}{c^2}\, OH_1,$$

et, dans le triangle rectangle OG_1S_1,

$$H_1S_1 = \frac{\overline{H_1G_1}^2}{OH_1},$$

d'où

$$H_1K_1 .\, H_1S_1 = \frac{b^2}{c^2}\,\overline{H_1G_1}^2 = \frac{b^2}{c^2}\, H_1F .\, H_1F' ;$$

ainsi, le produit des distances de H_1 à S_1 et à Δ est égal au carré de rayon de Γ [**32**] ; Δ est donc la polaire de S_1 par rapport à Γ.

Si la conique, au lieu d'être une ellipse, comme le suppose la figure 18, était une hyperbole, la démonstration serait la même,

si ce n'est que la tangente à la circonférence de diamètre FF′ devrait être menée par H_1, et alors S_1G_1 serait perpendiculaire à FF′.

35. — On voit que les cercles Γ et les droites Δ, définis provisoirement au moyen d'une tangente à la conique, ne dépendent pas de cette tangente, et possèdent une partie des propriétés des cercles bitangents et des droites des contacts. Pour être en droit de leur attribuer les autres, il suffira maintenant de leur étendre celle qui nous a servi de point de départ, c'est-à-dire de démontrer que tout point de Δ a même polaire par rapport à Γ et à la conique.

Les lettres déjà employées ayant toujours la même signification, soient de plus Z_1 (*fig.* 19), un point quelconque de K_1V_1 ou Δ, et Z, l'intersection de OZ_1 avec KV ; tirons HZ et H_1Z_1 ; ces deux lignes seront parallèles, puisque les rapports de OH à OH_1 et de OZ à OZ_1 égalent l'un et l'autre celui de OV à OV_1. Les polaires de Z et Z_1 par rapport à la conique sont parallèles parce que Z et Z_1 se trouvent sur un même diamètre ; mais la première coïncide avec celle de Z par rapport au cercle bitangent de centre H [**1**], laquelle est perpendiculaire à HZ ; donc la polaire de Z_1 par rapport à la conique est perpendiculaire à H_1Z_1, comme celle du même point par rapport à Γ ; d'ailleurs toutes deux passent par S_1, puisque Z_1 est sur Δ, et que S_1 est le pôle de Δ par rapport à Γ et par rapport à la conique ; donc elles se confondent.

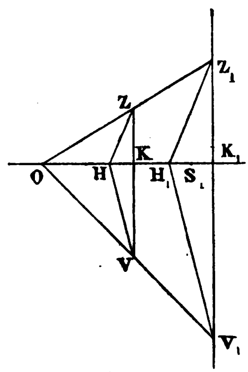


Fig. 19

36. — La proposition qui a été établie [**23**] sur la longueur de la corde commune à une conique et un cercle bitangent n'a plus de sens lorsqu'il s'agit des cercles Γ. Cependant, pour la leur rendre applicable, il suffit, dans l'énoncé, de substituer, à cette longueur, celle de la perspective, prise du centre de la conique et effectuée sur la tangente au sommet, de la corde que la conique intercepte sur la polaire du centre de Γ par rapport à la circonférence des foyers. Nous entendons ici, par circonférence des foyers, celle qui est décrite sur la distance focale comme diamètre.

Soient S_1 (*fig.* 20 et 21) le conjugé harmonique du centre de Γ par rapport aux foyers, K_1 celui de S_1 par rapport aux sommets

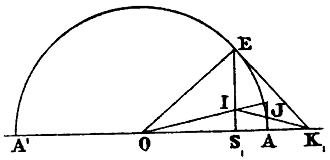


Fig. 20

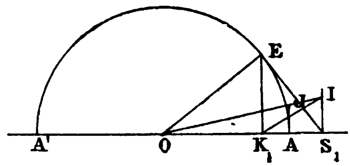


Fig. 21

A,A′. Menons, dans le cas de l'ellipse, la demi-corde S_1E (*fig.* 20) du cercle principal, ainsi que la tangente K_1E, ou, dans le cas de l'hyperbole, la demi-corde K_1E (*fig.* 21) et la tangente S_1E. Prenons le point de rencontre I de la conique avec la perpendiculaire en S_1 à l'axe AA′, puis celui J, de OI avec la tangente en A. Il s'agit de démontrer que le rapport de AJ à K_1E est celui de b à a.

On a, dans les deux cas,

$$\frac{AJ}{S_1I} = \frac{OA}{OS_1} = \frac{OE}{OS_1} = \frac{K_1E}{S_1E},$$

car les deux triangles EK_1S_1, OES_1 sont semblables ; il vient donc

$$\frac{AJ}{K_1E} = \frac{S_1E}{S_1I};$$

or, le dernier rapport est celui de b à a [**23**].

37. — Le rayon de Γ diminue à mesure que le centre se rapproche du foyer ; en même temps Δ s'éloigne du sommet. Quand le centre atteint le foyer, le rayon devient nul, et Δ se trouve être la polaire du foyer par rapport au cercle principal et par rapport à la conique.

Si l'on adopte l'usage habituellement suivi dans des cas analogues, on conservera aux cercles Γ le nom de cercles bitangents et aux droites Δ celui de droite des contacts ; seulement, on dira que les points de contact de ces cercles avec la conique sont imaginaires.

Les points de l'axe que nous n'avons pas encore considérés sont ceux qui, dans l'ellipse, se trouvent sur les prolongements de la ligne des foyers, ou, dans l'hyperbole, entre les deux foyers. Ils

sont aussi les centres de cercles jouissant de propriétés particulières, susceptibles d'être démontrées géométriquement ; mais, en ce qui les concerne, nous nous bornerons, pour le moment, à cette indication.

PROBLÈMES

38. — Voici les énoncés de plusieurs problèmes auxquels les propriétés ci-dessus établies fournissent des solutions géométriques. Actuellement, comme dans tout ce qui précède depuis le paragraphe **7**, il ne s'agit encore que de cercles bitangents de première espèce, à contacts réels ou imaginaires.

Décrire une circonférence bitangente à une conique donnée, connaissant son centre, ou son rayon, ou l'un de ses points, ou l'une de ses tangentes.

Construire les éléments d'une conique bitangente à un cercle donné, connaissant trois points de la courbe, ou deux points avec la tangente en l'un de ces points, ou deux tangentes avec l'un des points de contact, ou trois tangentes.

Construire les éléments d'une conique bitangente à deux cercles donnés, connaissant un point de la courbe, ou une tangente.

Construire les éléments d'une conique bitangente à trois cercles donnés.

(*A suivre*).

SECONDE NOTE

SUR LES CERCLES RADICAUX ET ANTI-RADICAUX

Par M. **Juan J. Duran-Loriga**
Commandant d'Artillerie à la Corogne.

(*Suite*; 1897, voir p. 15)

II

Passons à l'étude de ce que nous avons appelé précédemment *cercles anti-radicaux.*

Etant données une circonférence (O) et la radicale (ρ), on peut déterminer (O') circonférence anti-radicale de (O) par rapport à (ρ). En prenant une distance $\rho O' = O\rho$, on obtiendra son centre

O′ ; pour calculer son rayon, il faut déterminer R′ d'après la formule qui donne la valeur de ρ ; on a donc

$$R' = \sqrt{2(\rho^2 + d^2) - R^2}\,;$$

si nous appelons d la distance $O\rho$.

Pour que la circonférence (O′) soit réelle, on doit avoir

$$d > \sqrt{\frac{R^2 - 2\rho^2}{2}}.$$

En supposant

$$2(\rho^2 + d^2) - R^2 = 0,$$

la circonférence anti-radicale se réduit à un *cercle point*.

Etant données les équations de deux circonférences (C) et (C′)

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0,$$

la circonférence anti-radicale de (C) par rapport à (C′) est représentée par :

$$x^2 + y^2 + 2(2A' - A)x + 2(2B' - B)y + 2C' - C = 0.$$

Quand il s'agit de coordonnées barycentriques, on a

$$(c)\ (\alpha + \beta + \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0,$$
$$(c')\ (\alpha + \beta + \gamma)(u'\alpha + v'\beta + w'\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0,$$

et, pour la circonférence anti-radicale de (C), par rapport à (C′),

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[(2u'-u)\alpha+(2v'-v)\beta+(2w'-w)\gamma\right]-a^2\beta\gamma-b^2\alpha\gamma-c^2\alpha\beta=0.$$

Lorsqu'une des circonférences dégénère en *cercle point*, le rayon de la circonférence anti-radicale de (O) par rapport à un point ρ a pour valeur

$$R' = \sqrt{2d^2 - R^2},$$

d étant la distance $O\rho$; son centre, sur $O\rho$, est à une distance $OO' = 2O\rho$.

La circonférence anti-radicale sera réelle, réduite à un point, ou imaginaire, selon qu'on supposera

$$2d \gtreqless R\sqrt{2}.$$

Si l'équation de la circonférence est :

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$

a et b étant les coordonnées du point ρ, on aura pour équation de la circonférence anti-radicale de (O) par rapport à ρ,

$$x^2 + y^2 - 2(2a + A)x - 2(2b + B)y + 2(a^2 + b^2) - C = \rho.$$

Lorsque la circonférence a son centre à l'origine et que le point ρ est sur l'axe des x, à une distance d, l'équation est :

$$x^2 + y^2 - 4dx + 2d^2 + R^2 = 0.$$

De l'expression donnant la valeur du rayon R′ de la circonférence anti-radicale, nous déduisons :

$$2(R^2 + R'^2) = \overline{OO'}^2.$$

Il en résule, que les points de contact des tangentes communes à une circonférence et son anti-radicale par rapport à un point sont, quatre à quatre, sur deux droites qui coupent la ligne OO′ en un même point dont la distance à O est égale à $\frac{R^2}{d}$. Ainsi, ce point est le pied de la polaire de ρ par rapport à (O). De plus, ces droites sont inclinées de 45° sur la ligne de centres et les tangentes menées d'un point quelconque de ces droites aux circonférences (O) et (O′) sont en relation harmonique.

Enfin, si la circonférence (O) reste fixe et que le point C se meuve sur la ligne OO′, l'enveloppe des cercles anti-radicaux est l'hyperbole équilatère correspondant à l'équation

$$x^2 - y^2 = R^2.$$

Il est évident que toutes les circonférences qui passent par les points H et K où l'anti-radicale (O′) coupe la ligne de centres, sont aussi anti-radicales de (O) par rapport au point ρ, mais nous appelons particulièrement anti-radicale celle qui a son centre sur Oρ. (*A suivre*).

RELATIONS MÉTRIQUES

ET TRIGONOMÉTRIQUES

ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES

DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **Lecocq**, ancien professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, 1897 ; p. 9).

6. — *Longueurs des segments appartenant au périmètre du quadrilatère complété.*

$$\mathrm{SA} = \frac{l^2d}{d^2-b^2},\quad \mathrm{SB} = \frac{h^2b}{d^2-b^2},\quad \mathrm{SC} = \frac{l^2b}{d^2-b^2},\quad \mathrm{SD} = \frac{h^2d}{d^2-b^2};$$

$$\mathrm{QA} = \frac{l^2a}{a^2-c^2},\quad \mathrm{QB} = \frac{h^2a}{a^2-c^2},\quad \mathrm{QC} = \frac{l^2c}{a^2-c^2},\quad \mathrm{QD} = \frac{k^2c}{a^2-c^2};$$

Expression de la troisième diagonale

$$\mu^2 = h^2l^2\left\{\frac{ac}{(a^2-c^2)^2}+\frac{bd}{(d^2-b^2)^2}\right\} = \frac{4f^2h^4l^4}{(a^2-c^2)^2(d^2-b^2)^2},$$

d'où

$$\overline{\mathrm{SQ}}^2 = \mathrm{SA}\times\mathrm{SB}+\mathrm{QA}\times\mathrm{QD}.$$

Ainsi, la somme des puissances des points S et Q, par rapport au cercle O, est égale à μ^2. A l'aide de ces expressions et du théorème de Ménélaüs, on vérifiera facilement que chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres.

7. — *Réciproquement ; si, dans un triangle* SAQ, *on mène deux droites* SD *et* QB *telles que :*

$$\overline{\mathrm{SQ}}^2 = \mathrm{SA.SB}+\mathrm{QA.QD},$$

le quadrilatère ABCD *est inscriptible* (*fig.* 5).

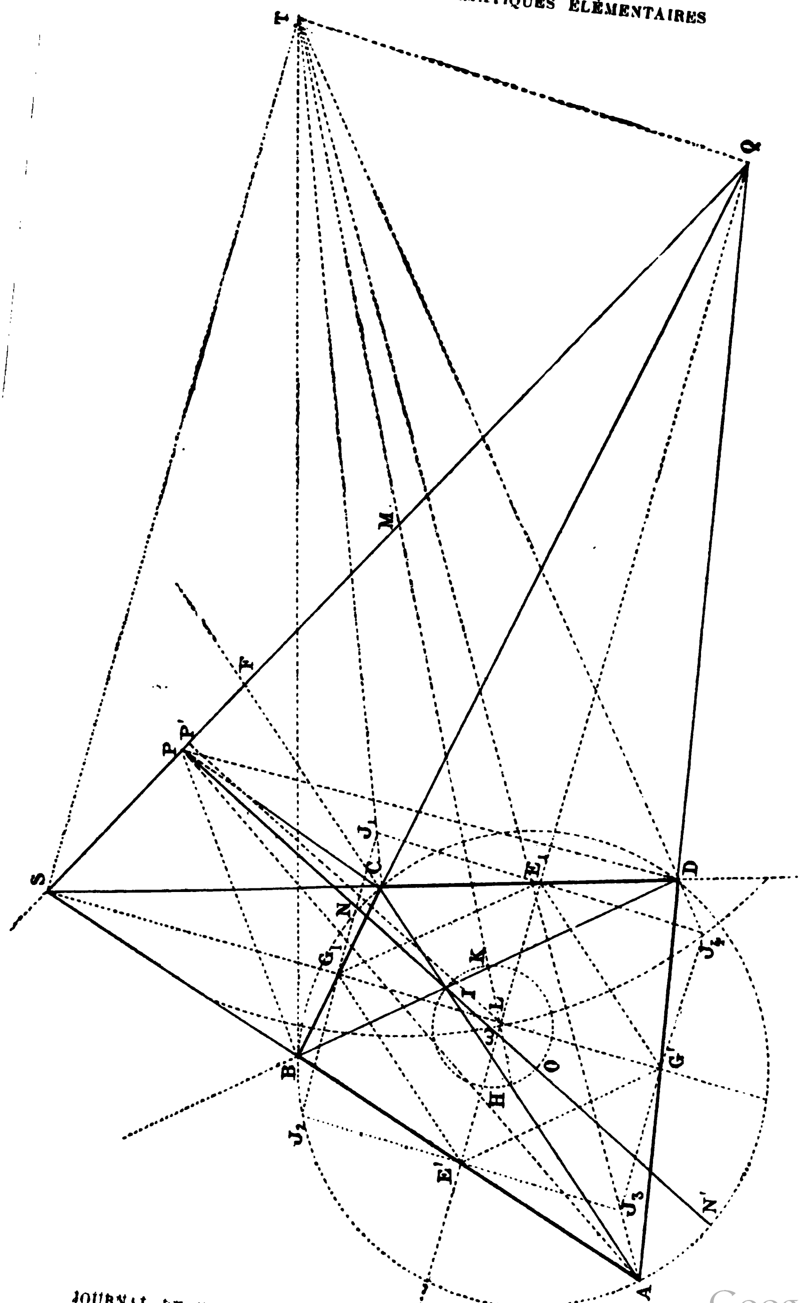
En effet, faisons passer une circonférence par A,D,S qui coupera SQ en un point P tel que :

$$\mathrm{QA.QD} = \mathrm{QP.QS},$$

il en résulte :

$$\mathrm{SA.SB} = \mathrm{SP.SQ},$$

et les quatre points A,B,P,Q sont aussi sur une même circonfé-


T
Q
M
F
P
P'
S
J1
C
E1
D
N
G1
K
I
J4
L
ω
O
G'
B
H
J2
E'
J3
N'
A

rence. On en déduit :

$$\widehat{BQP} = \widehat{BAP} = \widehat{SDP},$$

donc PCDQ est inscriptible.

De même :

$$\widehat{DSP} = \widehat{DAP} = \widehat{QBP},$$

et BSPC est aussi inscriptible, et, par suite :

$$\widehat{BCD} = \widehat{BSP} + \widehat{PQD} = 2^d - A.$$

8. — *Distances du point* P *aux sommets* A,B,C,D.

Les triangles PBA et PCD sont semblables, et de même les triangles PBC et PAD, ce qui donne :

$$\frac{PA}{ad} = \frac{PB}{ba} = \frac{PC}{cb} = \frac{PD}{dc} = \frac{1}{2f} \text{ (voir n° 10).}$$

On a donc aussi :

$$\frac{PA}{IA} = \frac{PB}{IB} = \frac{PC}{IC} = \frac{PD}{ID} = \frac{PO}{R} = \frac{R}{OI} = \frac{hl}{2kf} \text{ (voir n° 10).}$$

On voit que PI est une bissectrice commune des angles $\widehat{APC}$ et $\widehat{BPD}$. D'autre part :

$$\widehat{BPS} = \widehat{DPQ} = A,$$
$$\widehat{APS} = \widehat{CPQ} = D;$$

par suite, IP est perpendiculaire à SQ.

9. — *Du point* ω ; *formule de* PI.

La demi-circonférence, décrite sur SQ, rencontre la perpendiculaire PI en un point ω ; on a

$$\overline{S\omega}^2 = SA.SB = SC.SD = SP.SQ = \frac{h^2l^2bd}{(d^2 - b^2)^2},$$

$$\overline{Q\omega}^2 = QA.QD = QB.QC = QP.QS = \frac{h^2l^2ac}{(a^2 - c^2)^2},$$

d'où

$$\mu^2 = \overline{S\omega}^2 + \overline{Q\omega}^2 = \frac{4f^2h^4l^4}{(a^2 - c^2)^2(d^2 - b^2)^2} \quad \text{et} \quad P\omega = \frac{\sqrt{abcd}}{2f},$$

PI, bissectrice du triangle BPD, a pour expression

$$PI = \frac{2Sabcd}{fh^2l^2},$$

à cause de l'identité

$$h^2l^2(h^2l^2 - 4k^2f^2) = 16S^2abcd.$$

10. — *Position du centre* O *par rapport à* SQ — *formules de* PO *et de* OI — *relation entre* R *et* S.

Les triangles IAO et IPC sont semblables, car

$$\widehat{CAO} = \widehat{CAD} - \widehat{OAD} = \widehat{CBD} - (1^{dr} - \widehat{ACD}) = \widehat{CBD} + \widehat{ABD} - 1^{dr} =$$
$$\widehat{CBA} - 1^{dr} = \widehat{CPS} - 1^{dr} = \widehat{CPI}.$$

Les quatre points A,O,C,P sont sur une même circonférence et par conséquent :

$$\frac{AP + CP}{m} = \frac{PO}{R}.$$

On prouverait, de même, que BODP est inscriptible, d'où

$$\frac{BP + DP}{n} = \frac{PO}{R}.$$

D'autre part :

$$\overline{OS}^2 = R^2 + SA.SB,$$
$$\overline{OQ}^2 = R^2 + QA.QD;$$

d'où

$$\overline{OQ}^2 - \overline{OS} = QA.QD - SA.SB = \overline{Q\omega}^2 - \overline{S\omega}^2 = \overline{QP}^2 - \overline{SP}^2.$$

Ainsi le centre O est sur la perpendiculaire PI.

Il est facile d'établir que la tangente menée du point P au cercle O est égale à Pω ; en outre, la similitude des triangles AOI, ICP fournit

$$OI = \frac{abcdK^2}{h^2l^2 \times PI} = \frac{k^2f}{2S};$$

et, en vertu de la relation

$$4RS = hkl,$$

on a

$$PO = \frac{h^2l^2}{8fS}, \quad \text{et} \quad R^2 = OP.OI.$$

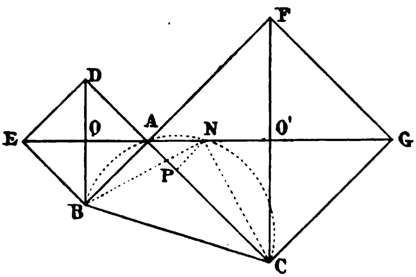
Ces résultats sont connus ; on sait en effet que le point I est le pôle de la droite SQ par rapport au cercle O.

(*A suivre*).

UNE NOUVELLE DÉMONSTRATION
DU THÉORÈME DE PYTHAGORE

Par M. **Brand**.

Sur les deux côtés c et b de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC, on construit les carrés BADE et CAFG dont on trace les diagonales.



Les droites OA et AO' sont dans le prolongement l'une de l'autre.

La demi-circonférence décrite sur BC, ou a, comme diamètre, coupe OO' en un point N.

On a $\widehat{BN} = \widehat{NC} = \frac{\varpi}{2}$, car $\widehat{NAC} = 45°$.

Donc, si on tire les droites BN et NC, le triangle BNC est rectangle isoscèle. Les triangles rectangles OBN et O'CN sont égaux.

Si on remarque que la hauteur NP du triangle ANC est égale (ainsi qu'il est facile de le voir) à $\frac{b-c}{2}$, on pourra écrire

$$\text{surf. } NO'C = \text{surf. } AO'C - \text{surf. } ANC,$$

$$= \frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} \cdot \frac{b-c}{2} = \frac{cb}{4};$$

c'est-à-dire que surf. NO'C $= \frac{1}{2}$ surf. ABC, ou surf. ABC $=$ surf. OBN $+$ surf. NO'C.

Dès lors, en soustrayant du quadrilatère OBCO' : d'une part, la surface du triangle ABC ; et, d'autre part, la somme des surfaces OBN et NO'C, on aura deux résultats équivalents, c'est-à-dire que

$$\text{surf. } BNC = \text{surf. } OAB + \text{surf. } ACO'.$$

En multipliant les deux membres par 4, on a

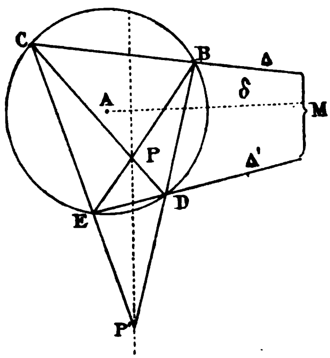
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE PRATIQUE

par M. **Alfred Bertezène.**

Par un point A, mener une droite qui aille passer par le point de rencontre M de deux droites Δ, Δ′ *qu'on ne peut prolonger.*

Ce problème a été traité de bien des façons diverses. On en trouve notamment une solution *par la règle* dans la *Géométrie de la règle et de l'équerre* de M. de Longchamps (p. 31).



Voici une solution qui est aussi très simple; mais elle exige l'emploi de la règle et du compas.

Du point A, comme centre, décrivons un cercle quelconque qui coupe les droites données. Traçons les diagonales du quadrilatère BCDE, qui se coupent en un point P. Prolongeons CE, BD jusqu'à leur rencontre en P′ et menons PP′. C'est la polaire du point M. La perpendiculaire δ, abaissée du centre A, sur PP′, passe par M.

Remarque. — On peut toujours disposer du rayon AE de telle sorte que la corde ED (ou la corde CB) étant très petite, CE et BD se rencontrent dans les limites de l'épure. Au besoin, on mènerait en E et en D deux perpendiculaires sur AE, AD. Ce seraient deux tangentes dont la rencontre à proximité fournirait le deuxième point de la polaire.

SUR UN THÉORÈME DE M. LEMOINE

Par M. **Jorge F. d'Avillez.**

M. E. Lemoine a démontré (J. E. 1896, p. 164), que, dans un triangle dont les côtés sont a, b, c, si F est le point de contact du cercle de Feuerbach avec le cercle inscrit et F′ le point où la

tangente en F touche l'ellipse d'aire maxima inscrite au triangle, on a

$$FF' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}.$$

Soit ABC un triangle tel que $a > b > c$; si O est le centre du cercle circonscrit, I le centre du cercle inscrit, H l'orthocentre, on peut donner une expression simple de l'aire du triangle OIH. En effet, on a, dans le triangle ABC,

$$FF' = \frac{1}{2} \frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{(a^2+b^2+c^2)-(bc+ca+ab)},$$

et d'après un théorème de M. Sondat (N. A. question 1593), si r représente le rayon du cercle inscrit au triangle ABC, on a :

$$OIH = \frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{8r}.$$

D'ailleurs, en représentant par δ la quantité $4R+r$, où R est le rayon du cercle circonscrit, on a

$$a^2+b^2+c^2 = 2(p^2-r\delta),$$

et comme

$$bc+ac+ab = (p^2+r\delta),$$

il vient

$$OIH = \frac{FF'}{4r}(p^2-3r\delta).$$

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir 1897, page 18)

PAPPUS

Après Archimède, on ne voit guère parmi les Anciens que Pappus qui se soit occupé de la Géométrie de la mesure, au moins comme recherches originales.

C'est à lui qu'on doit la transformation des procédés d'Archimède relatifs au mesurage de la sphère, tel qu'on l'enseigne encore aujourd'hui, sauf qu'il y fait usage de la méthode d'exhaus-

-ion. Cette démonstration emploie, comme on sait, les mêmes moyens pour la surface et pour les volumes : la considération d'un triangle isoscèle tournant autour d'une droite de son plan.

Pappus a donné la quadrature d'une surface sphérique limitée par une courbe définie ainsi qu'il suit : le quart de circonférence PB (*fig.* 19) fait une révolution complète autour du rayon PO, en partant de la position PKA, tandis que le point M, d'abord en P, se meut le long du même arc PR, ce qui donne une courbe PMM'A. On peut présenter la démonstration ainsi : avec le rayon CO, égal au côté du carré circonscrit au grand cercle, décrivons le quadrant CND. Le rayon OM rencontre l'arc PA en K ; traçons le petit cercle KML qui coupe la courbe PMM'A en M. Supposons que R et R' sont deux divisions consécutives de la circonférence ARBA en parties égales.

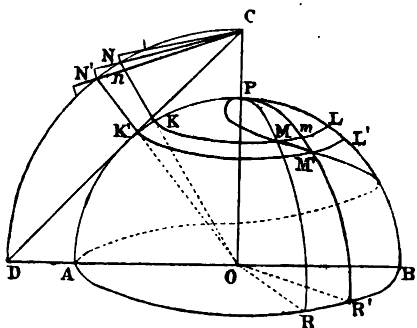


Fig. 19

On a

$$\frac{\text{fuseau PM}m}{\text{sect. ORR}'} = \frac{\overline{\text{PM}}^2}{\overline{\text{OR}}^2} = \frac{\overline{\text{PL}}^2}{\overline{\text{OP}}^2}, \quad \widehat{\text{ROR}'} = 4.\widehat{\text{KOK}'}\ 8.\widehat{\text{NCN}'};$$

donc

$$\frac{\text{sect. ROR}'}{\text{sect. NC}n} = \frac{8.\overline{\text{OR}}^2}{\overline{\text{CN}}^2}.$$

De ces égalités, on tire

$$\frac{\text{fuseau PM}m}{\text{sect. NC}n} = \frac{8.\ \overline{\text{PK}}^2}{\overline{\text{CN}}^2} = 4.$$

Les divisions dont nous avons parlé déterminent dans la surface sphérique PMA et dans le segment CND des polygones sphériques inscrits et circonscrits à la manière d'Archimède, et dont les aires peuvent par conséquent différer aussi peu qu'on le veut, en bissectant de plus en plus les arcs RR', R'R''... Il s'en suit que l'aire comprise entre la courbe PMM'A et l'arc PA égale le qua-

druple du segment CND. Or, la surface de l'hémisphère égale celle du secteur COD ; donc le reste de la surface, limité par la courbe, égale le triangle COD, lequel égale le carré du rayon OP.

Cette démonstration, si remarquable, a été présentée d'une manière plus générale par Mac-Laurin (*A Treat. of Flux.*) : le point M parcourt le quadrant PR, tandis que ce même quadrant fait une fraction quelconque de tour (*). La courbe PMM' avait déjà été ainsi généralisée, quarrée et rectifiée par Guido-Grandi (voir J. S. 1893, p. 176), qui lui avait donné le nom de *Clélie* (*Flores Geom.*) en l'honneur de la comtesse Clelia Grillo Borromeo, à qui ce livre était dédié. Un autre cas particulier remarquable de ces courbes est la *vivianienne* ou *cyclocylindrique*, qui a lieu quand le quart de circonférence parcourt un quart de tour seulement pendant que le point M parcourt le quadrant PR.

Probablement, pour ne pas compliquer sa figure, Pappus ne trace que les lignes correspondant aux divisions qu'il indique : il se contente de rappeler la méthode d'Archimède (F) : c'était un premier pas vers la simplification de la méthode d'exhaustion appelée *des indivisibles*.

C'est Pappus qui a énoncé le premier les deux théorèmes dits *de Guldin*, et il serait de toute justice qu'ils portassent son nom, d'autant plus que Guldin ne les a pas plus démontrés que lui.

La méthode d'exhaustion a été employée chez les Modernes principalement par Commandin, Lucas, Valerius, Neper, de la Faille, Guldin, Cavalieri, Roberval, Fermat, Torricelli, Léotaud, G. de Saint-Vincent, Pascal, Huygens, Tacquet, Lalouvère, James Gregory, Newton, Viviani, Nicolas, Guido-Grandi, Mac-Laurin et enfin Legendre, dans la célèbre *Géométrie* duquel on a cru devoir remplacer certaines démonstrations imitées des Anciens par d'autres plus courtes, mais assez peu rigoureuses pour un traité classique de géométrie.

(*A suivre*).

(*) Ce cas général se ramène d'ailleurs au cas particulier de Pappus : il est facile de se rendre compte que deux de ces surfaces sont entre elles comme les angles dont tourne le quadrant mobile, jusqu'à ce que le point M arrive au bas de ce dernier.

EXERCICES DIVERS

Par M. **A. Boutin.**

438. — *Combien peut-on former de nombres différents de* n *chiffres, en n'employant que* 3 *chiffres, ces* 3 *chiffres figurant dans chacun des nombres ?*

On trouve la formule :

$$x = 2.\frac{n(n-1)}{1.2} + 2(2^2-1)\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} +$$

$$+ 2(2^3-1)\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} + 2(2^4-1)\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} + \dots$$

où l'on prend seulement les $n-2$ premiers termes. On l'obtient en cherchant le nombre des arrangements qui contiennent $n-2$ fois l'un des chiffres et une fois chacun des deux autres ; puis $n-3$ l'un des chiffres, deux fois l'un des deux autres et une fois le troisième, etc... et faisant la somme.

Pour $n = 3, 4, 5, 6\dots\dots$

on a $x = 6, 36, 150, 540, \dots.$

439. — *Des jetons portent sur chaque face un numéro, de telle sorte que le côté pile et le côté face constituent les deux moitiés d'un domino. Pour le jeu ordinaire s'arrêtant au double-six et comprenant* 28 *dominos, il y aura* 28 *jetons correspondants, le blanc étant figuré par* 0. *On suppose que le jeu s'arrête au double* $n-1$. *Ceci posé, on jette ces jetons comme des dés, et on demande de vérifier les propositions suivantes :*

1° *Le nombre des coups possibles est :* $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

2° *La somme des points vus à chaque jet est comprise entre* $\frac{n(n^2-1)}{6}$ *et* $\frac{n(n^2-1)}{3}$.

3° *Le nombre de manières d'amener un total de points* p, *compris dans les limites précédentes est le coefficient de* x^p *dans le développement de*

$$2^n x^{\frac{n(n^2-1)}{6}} (x+1)^{n-1}(x^2+1)^{n-2}(x^3+1)^{n-3}\dots\dots(x^{n-1}+1).$$

4° *Si l'on supprime les* n *jetons qui correspondent aux* n *doubles, le nombre de manières d'amener un total déterminé* p *de points est le coefficient de* x^p *dans le développement de :*

$$x^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} (x+1)^{n-1}(x^2+1)^{n-2}(x^3+1)^{n-3}\dots,(x^{n-1}+1).$$

EXERCICES (*)

1. — *Deux angles droits ont leurs sommets en* o, *leurs côtés rencontrent une droite donnée en* a,b, *pour l'un, et en* a′,b′, *pour l'autre. Le point* p *étant le pied de la perpendiculaire abaissée de* o *sur la droite donnée, si* aa′ = a′p, *démontrer que* bb′ = pb.

2. — *Les sommets d'un rectangle donné sont* o, a, b, c. *Du point* o *on abaisse sur la diagonale* ac *la perpendiculaire* ol. *Cette droite rencontre les côtés du rectangle aux points* m, n. *Démontrer que* $\frac{1}{ol} = \frac{1}{om} + \frac{1}{on}$.

3. — *On donne un rectangle et un point* o *sur l'une de ses diagonales. La somme des carrés des distances de ce point aux extrémités de l'une des diagonales est égale à la somme analogue pour l'autre diagonale. Démontrer que cette propriété est vraie aussi, lorsque le point* o *est absolument quelconque.*

4. — *On donne une circonférence de cercle et deux points* a,b. *Par le point* a, *on mène une transversale. Par les deux points où elle coupe la circonférence donnée et par le point* b *on fait passer un cercle. Démontrer que lorsque la transversale tourne autour du point* a *les cercles analogues à celui-ci passent par un même point.*

5. — *On donne un angle* α *de sommet* o. *Du point* m *pris sur sa bissectrice, on abaisse sur ses côtés les perpendiculaires* mp, mq ; *démontrer que l'aire du quadrilatère* o p m q *est égale à* $\frac{\overline{om}^2 \sin \alpha}{2}$.

(*) Nous croyons rendre service aux Professeurs en indiquant sous ce titre des sujets de devoirs destinés aux commençants, mais nous n'en insérerons pas les solutions. Nous prions nos correspondants de nous adresser, de temps à autre, quelques énoncés de cette nature, signés ou non. Ceux-ci nous ont été adressés par M. Mannheim qui porte depuis longtemps à ce Journal un intérêt dont, profitant de l'occasion, je suis heureux de le remercier ici. G. L.

6. — *Sur les cordes d'un cercle comme diamètres, et dans des plans perpendiculaires à cette courbe, on décrit des cercles : à quelle surface appartiennent-ils ?*

7. — *Par les points d'un cercle d'une sphère donnée, on mène des parallèles à une droite fixe, elles rencontrent de nouveau la sphère : à quelle courbe appartiennent ces points de rencontre ?*

8. — *A quelle courbe appartiennent les points d'une sphère d'où l'on voit sous un angle droit un segment fixe donné ?*

BIBLIOGRAPHIE

COURS D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE conforme aux derniers programmes de l'enseignement classique et de l'enseignement moderne, par J. F. (Alfred Mame, à Tours ; Ch. Poussielgue, à Paris ; 1896).

Il y a aujourd'hui des baccalauréats en si grand nombre, des examens de genres si divers, qu'il paraît difficile de composer un livre en vue de telle ou telle préparation particulière ; il faudrait les multiplier par trop. Le mieux est d'écrire un livre élémentaire, sur l'Algèbre par exemple, comme celui que nous signalons ici à toute l'attention de nos lecteurs, en visant l'*enseignement général* de l'Algèbre élémentaire. Par contre-coup, si le livre est bien ordonné et suffisamment étendu, et c'est le cas de l'Algèbre en question, il pourra sans peine être utilisé, pour les préparations particulières, à la variété infinie !

L'auteur me permettra-t-il une légère critique ?

Lorsque, à la page 158, il parle des équations réciproques du quatrième degré, il distingue — je sais que cette distinction a été faite par d'autres — des équations réciproques de première et de deuxième espèce. Il n'y a, à bien envisager la chose, comme le faisaient les anciens auteurs (Mayer et Choquet notamment, si ma mémoire ne me trompe pas) qu'une seule équation réciproque du quatrième degré :

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bkx + Ak^2 = 0,$$

dans laquelle k est un paramètre quelconque. On peut donner à k les valeurs $+1$, -1, et beaucoup d'autres ; mais cela ne constitue pas des genres différents et qu'il soit nécessaire de distinguer en deux espèces.

J'ai vu avec plaisir que l'auteur maintenait l'introduction des dérivées et les premières notions de la Géométrie Analytique, dans l'ensemble des connaissances qu'on doit aborder dans le cours de mathématiques élémentaires. Un vent de réaction qui, il faut l'espérer, ne durera pas, en même temps qu'il touchait gravement les programmes d'admission à l'Ecole Polytechnique, a fait supprimer ces matières de l'enseignement des candidats à l'École de Saint-Cyr. On peut souhaiter en se plaçant au point

de vue scientifique, vraiment trop oublié au milieu de ces réformes regrettables, que cet enseignement soit bientôt remis au niveau scientifique auquel il avait été placé et qui permettait de juger les candidats sur un terrain autre que celui de la mémoire ; un terrain meilleur, je persiste à le croire. G. L.

Parmi les publications récentes, nous signalons à nos lecteurs :

1° Le *Bulletin de la Presse*. — Ce journal insère tout ce qui, au point de vue professionnel, peut intéresser les Publicistes, les Directeurs périodiques et les Imprimeurs.

Son programme comporte, outre une série d'articles de fond, la législation et la jurisprudence, — la liste des nouveaux journaux parus, — les modifications apportées aux anciens, — des études sur la presse, à l'étranger, — des causeries pratiques sur la presse, l'imprimerie et la publicité, — les documents relatifs aux syndicats de la presse, — les journaux et imprimeries à vendre, — les offres et demandes d'emplois, etc.

Cette publication bi-mensuelle est le complément naturel du *Guide de la Presse*, « Bibliographie annuelle des journaux et périodiques », l'ouvrage est le plus complet du genre.

Demander des spécimens gratuits des deux publications à M. E.-G. Raymond, 21, *quai Saint-Michel*, *Paris*.

2° L'*Écho du Public*. — Cette publication est inspirée par la même idée que celle qui a présidé à la fondation de l'*Intermédiaire des chercheurs et curieux* et, plus récemment, à celle de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*. L'*Écho du Public* est un instrument d'information sur toutes les choses : littérature, sciences, arts, théâtre, curiosité pure, etc... Il paraît tous les samedis (Prix : **0** fr. **10**; abonnement : un an : **6** francs ; six mois : **3** fr. **50**. 54, *Rue de la Victoire*, *Paris*).

BACCALAURÉATS

Académie de Caen.

1° *Questions au choix :* (*a*) Définition d'une fraction irréductible. Montrer que la condition nécessaire et suffisante est que les deux termes soient premiers entre eux. Combien y a-t-il de fractions irréductibles inférieures à l'unité et ayant pour dénominateur 48 ?

(*b*) Théorie de l'extraction de la racine carrée à moins d'une unité.

(*c*) Somme des carrés des n premiers nombres entiers.

2° *Problème*. — Étant donnée une parabole dont le foyer est en F, d'un point M de la courbe on abaisse la perpendiculaire MP sur son axe : montrer comment varie le volume du cône engendré par la révolution du triangle MPF autour de son côté PF, lorsque le point P se déplace sur la parabole à partir du sommet.

Académie de Clermont.

1° *Questions au choix :* (*a*) Volume engendré par un segment de cercle ;

(*b*) Intersection d'une droite et d'une parabole ;

(*c*) Propriétés de la tangente à la parabole.

2° *Problème.* — Etant donné un trièdre trirectangle OXYZ et un point A sur OX, demande de déterminer sur OY et sur OZ des points B, C tels que la sphère circonscrite au tétraèdre OABC ait un rayon donné r et que le volume du tétraèdre OABC ait une valeur donnée b^3. Calculer ensuite l'aire du triangle ABC. On prendra $OA = a$.

Académie de Grenoble.

1° *Questions au choix* : (*a*) Etablir la formule :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b;$$

(*b*) Etant donnée $\operatorname{tg} a$, trouver $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$;

(*c*) Résoudre un triangle, connaissant les trois côtés.

2° *Problème.* — A l'intérieur d'un triangle ABC, dont les côtés sont a, b, c, et dont la hauteur $AD = h$, on mène une parallèle EF à BC, à une distance $AG = x$ du sommet A; on prolonge EF à l'extérieur de longueurs EH = EA, FI = FA, et on joint HB, IC. On demande : 1° d'exprimer en fonction des données et de x l'aire du trapèze HBCI; 2° de déterminer la valeur de x pour laquelle cette aire est maxima.

Académie de Lille.

1° *Questions au choix :* (*a*) Divisibilité de $x^m + a^m$ par $x + a$.

(*b*) $x^m - a^m$ est toujours divisible par $x - a$.

(*c*) Calculer le quotient de $\left(\frac{x^m - a^m}{x - a}\right)$; en déduire la formule qui donne la somme des termes d'une progression géométrique.

2° *Problème.* — On connaît la petite base d'un trapèze isoscèle et la somme b des deux côtés non parallèles. Déterminer la grande base $2x$ et la hauteur y, de telle sorte que l'aire du trapèze soit égale à celle d'un carré de côté m. — Discuter.

QUESTION 693

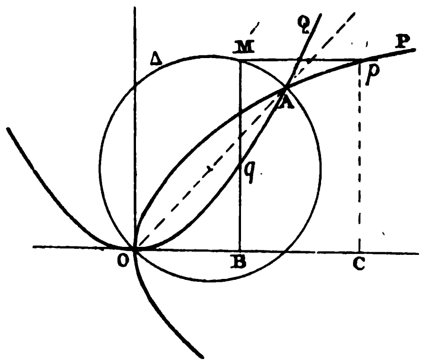
Solution par M. A. DROZ-FARNY.

On considère une parabole P, *de sommet* O. *On fait tourner, dans son plan, autour de* O, *d'un angle droit, la parabole* P; *soit* Q *sa nouvelle position. Les deux paraboles* P, Q *ont un seul point réel commun* A; *sur* OA *comme diamètre, on décrit une circonférence* Δ. *Par un point* M, *arbitrairement choisi sur* Δ, *on mène des parallèles aux axes des paraboles* P *et* Q; *elles les rencontrent respectivement aux points* p *et* q. *Démontrer que le triangle* pMq *est isoscèle.* (G. L.)

Les paraboles P et Q ont respectivement pour équations

$$y^2 = 2px, \qquad \text{et} \qquad x^2 = 2py.$$

Elles se coupent en un point A tel que OA est incliné de 45° sur les axes de P et de Q;



les coordonnées de A sont donc évidemment

$$x = y = 2p,$$

et le cercle Δ aura pour équation

$$(x-p)^2+(y-p)^2=2p^2,$$

ou

(I) $x^2 + y^2 - 2px - 2py = 0.$

Soit M un point de Δ; Mq rencontre en B l'axe de P et soit pC l'ordonnée de p; on aura

$$Mp = OC - OA = \frac{\overline{pC}^2}{2p} - OB = \frac{\overline{MB}^2}{2p} - OB.$$

$$Mq = MB - qB = MB - \frac{\overline{OB}^2}{2p}.$$

Or, d'après l'équation (I) du cercle Δ

$$\frac{\overline{OB}^2}{2p} + \frac{\overline{MB}^2}{2p} - OB - MB = 0;$$

donc $$Mp = Mq.$$

QUESTION 694

Solution par M. A. Droz-Farny

Plaçant le pôle d'une transformation par rayons vecteurs réciproques au sommet c *d'un triangle donné* abc, *on prend les transformés* a′, b′ *des sommets* a, b. *Démontrer que le transformé du centre* o *du cercle inscrit au triangle* abc *est, sur la droite* co, *le centre du cercle ex-inscrit au triangle* a′cb′.

(Mannheim).

Soient d'abord o et o_1 les centres du cercle inscrit et ex-inscrit dans l'angle c au triangle abc; on sait que l'on a :

$$co = \frac{p-c}{\cos\frac{c}{2}}, \quad co_1 = \frac{p}{\cos\frac{c}{2}}; \quad \text{d'où} \quad co.co_1 = \frac{p(p-c)}{\cos^2\frac{c}{2}} ab,$$

résultat qui confirmerait déjà le théorème de M. Mannheim, dans le cas particulier d'un module de transformation $k^2 = ab$.

Il en résulte :

$$\text{(I)} \qquad co_1 = \frac{ab \cdot \cos \frac{c}{2}}{p - c}.$$

Soit maintenant k^2 le module d'une transformation par rayons vecteurs réciproques ; on aura :

$$ca' = \frac{k^2}{a}; \quad cb' = \frac{k^2}{a};$$

$$ab' = \frac{ck^2}{ab};$$

donc

$$p' = \frac{pk^2}{ab};$$

$$p' - c' = \frac{(p - c)\, k^2}{ab},$$

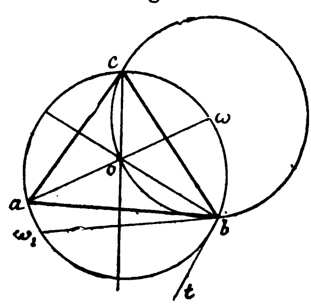
et par conséquent

$$co' = \frac{k^2}{co} = \frac{k^2 \cos \frac{c}{2}}{p - c} = \frac{k^4 \cos \frac{c}{2}}{ab(p' - c')} = \frac{a'b' \cos \frac{c}{2}}{p' - c'}.$$

Ainsi, d'après la formule (I), o' est le centre du cercle ex-inscrit dans l'angle c au triangle $a'cb'$.

Solution par M. L'Huillier.

Traçons le cercle (ω) circonscrit à cob, cercle qui a pour centre le point ω où la bissectrice de l'angle a rencontre la circonférence abc et la tangente $b\omega_1$, en b, à ce cercle. Traçons, de même, le cercle circonscrit à abc et la tangente bt en b à ce cercle. On a évidemment $\widehat{cb\omega_1} = \frac{\widehat{c} + \widehat{b}}{2}$, $\widehat{cbt} = \widehat{c} + \widehat{b}$, donc le cercle ($\omega$) bissecte l'angle en b de bc et du cercle circonscrit.



Dans une transformation quelconque par rayons vecteurs réciproques de sommet c, l'inverse o' de o est l'intersection de co avec

l'inverse du cercle (ω). L'inverse du cercle circonscrit est la droite $a'b'$ et la droite inverse de (ω) est la bissectrice de l'angle extérieur de $a'b'c$.

QUESTION 698

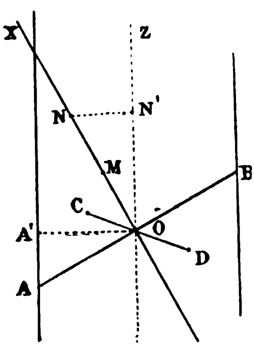
Solution, par M. Francis Dauzats, soldat au 51[e] de ligne.

On donne le point O *et la surface* (S) *de la question* 697 (*). *Par* O, *on mène un plan arbitraire et une perpendiculaire à ce plan. Sur cette droite, on prend des points à des distances de* O *égales aux distances de ce point* O *à l'intersection du plan arbitraire de* (S).

Quelle est la surface lieu des points ainsi obtenus, lorsqu'on fait varier le plan ordinaire? (Mannheim).

La surface S est un cylindre de révolution dont l'axe passe par O. Les plans déterminent des ellipses dont les demi-axes sont les distances considérées. Soit OX la perpendiculaire au plan ABCD.

1° En portant OM = CO, le petit axe de l'ellipse étant égal au rayon OA′ du cylindre, le lieu de M est la sphère décrite de O comme centre et inscrite dans le cylindre (sphère tangente au plan donné dans la question 697).



2° En portant ON = OA, N′ étant la projection de N sur l'axe, on voit facilement que ON′ = OA′. Donc le lieu de N se compose des deux plans tangents à la sphère précédente aux intersections avec l'axe (soit, le plan donné dans la question 697 et son symétrique par rapport à O).

Nota. — Solutions diverses par MM. Droz-Farny; Goyens; H. L'Huillier.

(*) Voyez la solution de cette question, p. 23.

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

SUR LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite*, 1897, page 25)

CERCLES BITANGENTS DE SECONDE ESPÈCE

39. — Ce sont les cercles bitangents dont les centres se trouvent sur le second axe ou axe non focal. La circonférence de chacun a tous ses points extérieurs à la conique, et les tangentes à celle-ci la rencontrent.

Un cercle étant donné ainsi qu'une droite qui le coupe, nous appelons *nœuds* les deux points qui, situés sur le diamètre perpendiculaire à la droite, ont leurs distances à cette droite égales à la moitié de la corde interceptée. On verra plus loin ce qui nous autorise à désigner ces points sous un nom déjà affecté à d'autres [**7**].

La moitié de la distance des nœuds est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu aux extrémités du diamètre qui les contient.

Deux circonférences qui se coupent ont les mêmes nœuds par rapport à leur axe radical.

40. — *De chaque nœud on voit, sous un angle droit, la portion de la droite comprise entre l'un quelconque de ses points et la symétrique, par rapport au milieu de la corde interceptée, de la polaire de ce point.*

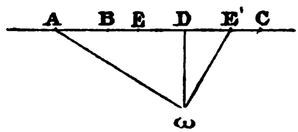


Fig. 22

Soient A (*fig.* 22) un point de la droite, BC la corde comprise dans le cercle, D le milieu de BC. Sur la perpendiculaire en D à BC, portons Dω égal à BD ; ω sera l'un des nœuds. Supposons que E soit le conjugué harmonique de A par rapport à B, C ; prenons DE′ égal à DE ; il s'agit de démontrer que l'angle AωE′ est droit. Or, de $\overline{BD}^2 = AD.DE$, $BD = D\omega$ et $DE = DE'$, on conclut $\overline{D\omega}^2 = AD.DE'$, de sorte que le triangle AωE′ est rectangle en ω.

41. — *Si l'on joint l'un des nœuds d'une tangente à une conique et d'un cercle bitangent 1° avec le point d'intersection*

de la tangente et de la droite des contacts, 2° avec le symétrique du point de contact de cette tangente par rapport au milieu de la corde qu'elle détermine dans le cercle, les deux lignes ainsi obtenues seront perpendiculaires entre elles [**6**, **40**].

42. — *Le lieu des nœuds d'une même tangente à la conique par rapport aux divers cercles bitangents se compose de deux droites passant par le point de contact.*

Soient O (*fig.* 23) le centre de la conique, MT la tangente en M, H le centre d'un cercle bitangent, C l'une des extrémités de la corde qu'il intercepte sur MT, U et V les points de rencontre de la droite des contacts avec MT et avec MO. La perpendiculaire menée de H à MT passera par V ; sur cette perpendiculaire prenons Dω égal à CD ; ω sera l'un des nœuds.

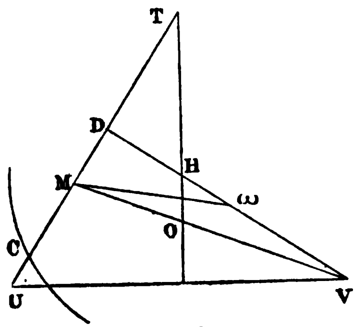


Fig. 23

Le cercle venant à changer, mais M restant fixe, les triangles DMV, DUV conserveront leurs angles, de sorte que DU variera proportionnellement à DM ; il en sera de même de Dω, puisque l'on a $D\omega = CD$ et $\overline{CD}^2 = DM.DU$ [**6**]. Le rapport de Dω à DM étant constant, l'angle DMω l'est aussi, et ω décrit une droite issue de M.

43. — *Les droites lieux des nœuds d'une même tangente par rapport aux divers cercles bitangents coupent l'axe non focal en deux points situés, avec les foyers, sur une même circonférence.*

Pour construire les deux droites, on peut se servir d'un cercle bitangent quelconque ; prenons, à cet effet, le cercle principal. Il intercepte, sur la tangente MU (*fig.* 24), une corde CC′, dont les extrémités sont les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers F, F′ sur MU, et dont le milieu D est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O. Portant, sur cette dernière, les longueurs Dω, Dω′ égales à CD, on aura, en ω, ω′, les nœuds du cercle par

rapport à MU ; si l'on tire ensuite Mω, Mω′ (*) jusqu'à leurs intersections en Z, Z′ avec l'axe nonfocal, Z, Z′ seront les points dont

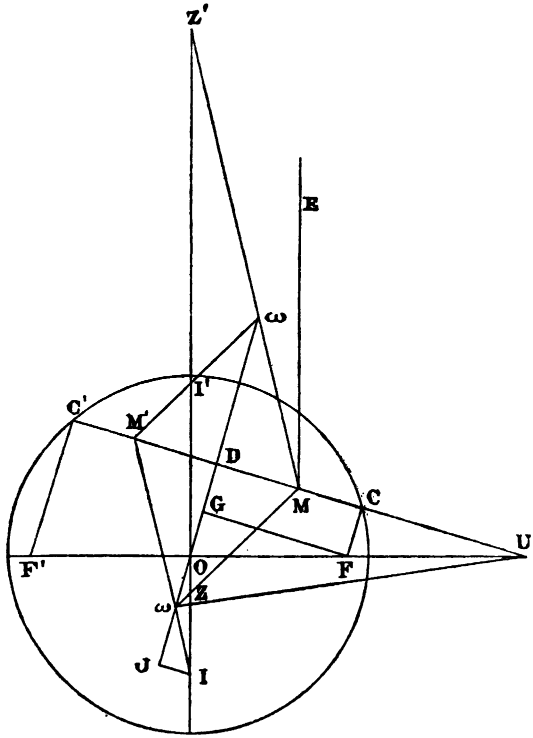


Fig. 24

il s'agit dans l'énoncé. Il faut prouver que ces points sont de côtés différents de O, et que c est moyenne proportionnelle entre OZ et OZ′.

Menons ME parallèle au second axe ; prenons, sur la tangente, le symétrique M′ de M par rapport à D, et joignons-le à ω ainsi qu'à ω′ ; U désignant le point où la tangente rencontre l'axe focal, qui sert ici de droite des contacts, si l'on tire ωU, l'angle UωM′ sera droit [41]. Supposons d'abord OD < CD ; ω sera sur le prolongement de DO, et Z au-dessous de O ; alors on aura $\widehat{D\omega U} < \widehat{DOU}$. Le premier de ces angles est égal à DMω, par

(*) ω′ est placé sur MZ′, au point marqué ω par une erreur de la figure.

suite à DMω' ; le second est égal à DME ; on a donc $\widehat{DM\omega'} < \widehat{DME}$, ce qui exige que Z' soit au-dessous de O. Au contraire, pour OD > CD, ω et Z se trouveront au-dessus de FF'; on aura $\widehat{D\omega U} > \widehat{DOU}$, d'où $\widehat{DM\omega'} > \widehat{DME}$, et Z' sera au-dessous de O.

Soient maintenant I et I' les points d'intersection de M'ω et de M'ω' avec le second axe ; abaissons IJ perpendiculaire sur OD. Les triangles semblables OIJ, ODU donnent OD.OJ = DU.IJ, et, les triangles IJω, DUω, ωD.ωJ=DU.IJ ; il vient donc OD.OJ=ωD.ωJ. Ainsi, entre les lignes OJ, ωJ, il y a non seulement même différence Oω qu'entre les lignes ωD, OD, mais aussi même rapport, par conséquent les deux premières sont respectivement égales aux deux autres, d'où résulte OJ = ωD = CD. Menons, par F, une parallèle à CD jusqu'à sa rencontre en G avec OD ; on aura aussi FG = CD ; les deux triangles rectangles OIJ, OFG seront égaux, et il viendra OI = OF = c. On démontrerait de même l'égalité OI' = c.

Enfin, les triangles OωZ, Oω'Z' étant respectivement semblables à OI'ω', OIω, on a

$$OZ = c\,\frac{O\omega}{O\omega'}, \qquad OZ' = c\,\frac{O\omega'}{O\omega},$$

d'où résulte

$$OZ.OZ' = c^2.$$

44. — *Le centre d'un cercle bitangent, le saillant et les deux points de contact du cercle et de la conique se trouvent, avec les foyers, sur une même circonférence.*

Soient O (*fig.* 25) le centre de la conique, S, S' et H, H' les points de rencontre des deux axes avec la tangente et avec la normale en un point L de la courbe ; H, H' seront les centres, S, S' les saillants de deux cercles bitangents d'espèces différentes ayant un point de contact commun en L. Les triangles semblables OHH', OSS' donnent OH'.OS' = OH.OS. Le second produit étant égal à c^2 [**19**], il en sera de même du premier ; on a donc

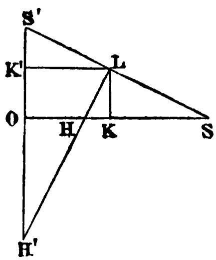


Fig. 25

$$OH'.OS' = c^2,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

45. — De L (*fig.* 25), abaissons, sur les axes, les perpendiculaires LK, LK'. A cause de la similitude des triangles OHH', HKL, H'K'L, les lignes OH', OK', H'K' sont proportionnelles à OH, HK, OK, par conséquent [**22**] à c^2, b^2, a^2. Si donc on désigne par h', k', s' les distances du centre de la conique au centre du cercle bitangent de seconde espèce, à la corde des contacts, au saillant, et, par δ', celle du centre du cercle à la corde des contacts, on aura, en tenant compte de la relation du paragraphe précédent,

$$\frac{a^2}{\delta'} = \frac{b^2}{k'} = \frac{c^2}{h'} = s'.$$

Quant aux deux rayons H'L, HL, ils sont entre eux dans le rapport de a^2 à b^2.

On voit que la droite des contacts est, dans l'ellipse, la polaire du saillant par rapport au cercle décrit sur le petit axe comme diamètre, ce qui résulte d'ailleurs [**1**] de ce que ce cercle est bitangent de première espèce, avec le second axe pour droite des contacts. Lorsque la conique est une hyperbole, la droite des contacts est symétrique, par rapport au centre, de la polaire du saillant dans le cercle de rayon b concentrique à l'hyperbole.

Ce que nous venons de dire du saillant et de la droite des contacts s'applique à tout point du second axe et à sa polaire par rapport à la conique. On en conclut que, pour un cercle bitangent donné, le saillant et le milieu de la corde des contacts sont les seuls points du second axe ayant, dans ce cercle, la même polaire que dans la conique. La démonstration du § **5** se trouve ainsi complétée. (*A suivre*).

RELATIONS MÉTRIQUES
ET TRIGONOMÉTRIQUES
ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES
DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **Lecocq**, ancien professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, 1897 ; p. 32).

11. — *De quelques problèmes et conséquences.*

A l'aide de ce qui précède, on pourra résoudre facilement les problèmes qui suivent.

Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant :

1° a, b, c, d;
2° b, d, m, n;
3° R, SA × SB, QA × QD, a;
4° SA × SB, QA × QD, a, b;
5° SA × SB, QA × QD, b, d;
6° QA × QD, d, a, b;
7° h^2, k^2, l^2 et R ou S.

Les premières formules du n° 6 conduisent aux égalités :

$$\frac{IA}{IC} = \frac{d \cdot QB}{b \cdot QD}, \qquad \frac{ID}{IB} = \frac{d \cdot Qc}{b \cdot QA},$$

$$\frac{SA}{SB} = \frac{d \cdot QA}{b \cdot QB}, \qquad \frac{Sc}{SD} = \frac{d \cdot QD}{b \cdot QC}.$$

De ces égalités, il résulte que si QAD est fixe et si QA, QD, QC, QB sont constants, lorsqu'on fait tourner QcB autour de Q, les points I et S décrivent des circonférences.

En considérant AD et BC comme les diamètres de deux cercles perpendiculaires au plan de la figure (*fig.* 1), la circonférence de diamètre BC engendre, en tournant autour de l'axe perpendiculaire, de tracé Q, la surface d'un tore, et la circonférence décrite par le point S est le lieu géométrique des points de vue d'où les perspectives des méridiens d'un tore sur un tableau fixe passant par son axe sont un seul et même cercle.

Si, étant donné l'axe radical de deux cercles O et O′, on fait tourner l'un d'eux d'un angle quelconque autour de cet axe, de manière à lui faire occuper la position O″, les deux cercles O et O″ appartiennent à un même cône, et le lieu de son sommet est une circonférence.

12. — *Du point de rencontre* L *des bissectrices des angles* S *et* Q *du quadrilatère complété* (*fig.* 5). *Formules de* SL *et* QL.

Les propriétés des bissectrices d'un triangle conduisent à

$$\frac{BE'}{h^2} = \frac{AE'}{l^2} = \frac{a}{(a+c)(d+b)} = \frac{a}{h^2+l^2},$$

$$\frac{BG_1}{h^2} = \frac{CG_1}{l^2} = \frac{b}{(a+c)(d+b)} = \frac{b}{h^2+l^2},$$

$$\frac{CE_1}{l^2} = \frac{DE_1}{h^2} = \frac{c}{(a+c)(d+b)} = \frac{c}{h^2+l^2},$$

$$\frac{AG'}{l^2} = \frac{DG'}{h^2} = \frac{d}{(a+c)(d+b)} = \frac{d}{h^2+l^2},$$

$$SG' = \frac{2dhl\sqrt{(p-b)(p-d)}}{(a+c)(d^2-b^2)}, \quad SG_1 = \frac{2bhl\sqrt{(p-b)(p-d)}}{(a+c)(d^2-b^2)},$$

$$G_1G' = \frac{2hl\sqrt{(p-b)(p-d)}}{(a+c)(d+b)}, \quad SL = \frac{hl\sqrt{(p-b)(p-d)}}{(a+c)(d-b)},$$

$$QE' = \frac{2ahl\sqrt{(p-a)(p-c)}}{(d+b)(a^2-c^2)}, \quad QE_1 = \frac{2chl\sqrt{(p-a)(p-c)}}{(d+b)(a^2-c^2)},$$

$$E'E_1 = \frac{2hl\sqrt{(p-a)(p-c)}}{(a+c)(d+b)}, \quad QL = \frac{hl\sqrt{(p-a)(p-c)}}{(a-c)(d+b)}.$$

On vérifie aisément que :

$$\overline{SL}^2 + \overline{QL}^2 = \overline{SQ}^2,$$

ainsi l'angle SLQ est droit, résultat connu. Le quadrilatère $E_1G_1E'G'$ est donc un losange dont le côté θ et la hauteur ζ sont donnés par les formules :

$$\theta = \frac{hkl}{(a+c)(d+b)}, \quad \zeta = \frac{2hlS}{k(a+c)(d+b)}.$$

Nota. — Les côtés du losange sont parallèles aux diagonales du quadrilatère.

Corollaire. — Le point L coïncide avec ω si on l'a :

$$a + c - (d+b) = \varepsilon = 0.$$

13. — *Rappel des déterminations trigonométriques des angles de la fig.* 5 A, B, C, D, I, S, Q.

$$\cos A = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2l^2}, \quad \cos B = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2h^2},$$

$$\cos C = \frac{b^2+c^2-a^2-d^2}{2l^2}, \quad \cos D = \frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2h^2};$$

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{l}, \quad \cos\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{(p-c)(p-d)}}{h},$$

$$\cos\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{(p-a)(p-d)}}{l}, \quad \cos\frac{D}{2} = \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)}}{h};$$

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{(p-a)(p-d)}}{l},\qquad \sin\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{(p-a)(p-b)}}{h},$$

$$\sin\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{l},\qquad \sin\frac{D}{2}=\frac{\sqrt{(p-c)(p-d)}}{h};$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}},\qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-d)}},\qquad \operatorname{tg}\frac{D}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-d)}{(p-a)(p-b)}};$$

$$\cos I=\frac{a^2+c^2-d^2-b^2}{2k^2},\qquad \cos S=\frac{h^4+l^4-(d^2-b^2)^2}{2h^2l^2},$$

$$\cos Q=\frac{h^4+l^4-(a^2-c^2)^2}{2h^2l^2};$$

$$\cos\frac{I}{2}=\frac{\sqrt{(p-b)(p-d)}}{k},\qquad \cos\frac{S}{2}=\frac{(d+b)\sqrt{(p-b)(p-d)}}{hl},$$

$$\cos\frac{Q}{2}=\frac{(a+c)\sqrt{(p-a)(p-c)}}{hl};$$

$$\sin\frac{I}{2}=\frac{\sqrt{(p-a)(p-c)}}{K},\qquad \sin\frac{S}{2}=\frac{(d-b)\sqrt{(p-a)(p-c)}}{hl},$$

$$\sin\frac{Q}{2}=\frac{(a-c)\sqrt{(p-b)(p-d)}}{hl};$$

$$\operatorname{tg}\frac{I}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{(p-b)(p-d)}},\qquad \operatorname{tg}\frac{S}{2}=\frac{(d-b)\sqrt{(p-a)(p-c)}}{(d+b)\sqrt{(p-b)(p-d)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{Q}{2}=\frac{(a-c)\sqrt{(p-b)(p-d)}}{(a+c)\sqrt{(p-a)(p-c)}}.$$

14. — *Coordonnées des sommets du quadrilatère par rapport aux deux droites* LQ *et* LS, *comme axes. Coordonnées de* I.

Soient x_1y_1(A); x_2y_2(B); x_3y_3(C); x_4y_4(D); ces coordonnées. On trouvera :

$$\frac{x_1}{-dm}=\frac{x_2}{-bn}=\frac{x_3}{bm}=\frac{x_4}{dn}=\frac{\sqrt{(p-a)(p-c)}}{k(d+b)},$$

$$\frac{y_1}{-am}=\frac{y_2}{an}=\frac{y_3}{cm}=\frac{y_4}{-cn}=\frac{\sqrt{(p-b)(p-d)}}{k(a+c)}.$$

Les distances du point L aux quatre sommets seront données

par :

$$\frac{\frac{1}{m^2}\overline{LA}^2}{\left(\frac{a}{a+c}\right)^2(p-b)(p-d)+\left(\frac{d+b}{d}\right)^2(p-a)(p-c)}$$
$$=\frac{\frac{1}{n^2}\overline{LB}^2}{\left(\frac{b}{d+b}\right)^2(p-a)(p-c)+\left(\frac{a}{a+c}\right)^2(p-b)(p-d)}$$
$$=\frac{\frac{1}{m^2}\overline{LC}^2}{\left(\frac{c}{a+c}\right)^2(p-b)(p-d)+\left(\frac{b}{d+b}\right)^2(p-a)(p-c)}$$
$$=\frac{\frac{1}{n^2}\overline{LD}^2}{\left(\frac{d}{d+b}\right)^2(p-a)(p-c)+\left(\frac{c}{a+c}\right)^2(p-b)(p-d)}=\frac{1}{k^2}.$$

Les coordonnées de I sont :

$$x=\frac{bd(a-c)\sqrt{(p-a)(p-c)}}{hl(d+b)},\quad \text{ou}\quad \frac{\alpha^2\gamma(\delta^2-\beta^2)}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2}$$
$$y=\frac{ac(d-b)\sqrt{(p-b)(p-d)}}{hl(a+c)},\quad \text{ou}\quad \frac{\beta^2\delta(\gamma^2-\alpha^2)}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2}$$
(*voir* n° 17)

15. — *Coordonnées du centre* O.

On établit d'abord les égalités

$$\overline{OG'}^2=R^2-\frac{\theta^2}{mn}d^2,\quad \overline{OG_1}^2=R^2-\frac{\theta^2}{mn}b^2,$$
$$\overline{OE'}^2=R^2-\frac{\theta^2}{mn}a^2,\quad \overline{OE_1}^2=R^2-\frac{\theta^2}{mn}c^2;$$

on en déduit :

$$x=-\frac{(a-c)hl}{4(b+d)\sqrt{(p-a)(p-c)}}\quad \text{ou}\quad -\frac{\gamma\beta^2(\delta^2+\alpha^2)}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2}$$
$$y=-\frac{(d-b)hl}{4(a+c)\sqrt{(p-b)(p-d)}}\quad \text{ou}\quad -\frac{\delta\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2}$$
(n°s 16, 17, 18).

Si le quadrilatère est en même temps circonscriptible, on a $OL = O\omega$ dont l'expression devient :

$$\frac{h^2l^2f}{2S(a+c)(d+b)},\quad \text{ou}\quad \frac{\alpha\beta\mu\sqrt{\alpha^2+\delta^2}\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2}$$
(n°s 16, 17, 18).

(*A suivre*).

UNE QUESTION D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

Par M. **Delannoy**.

L'une quelconque des équations

$$2t^3 \pm 1 = t'^3, \qquad 2t^3 \pm 2 = t'^3, \qquad t^3 \pm u^3 = 4t'^3,$$

est impossible en nombres entiers (P. F. Teilhet) (*).

Dans ses *Éléments d'Algèbre* (édition 1798, t. II, § **247**, p. 355), Euler a démontré que l'équation $x^3 \pm y^3 = 2z^3$ est impossible, si ce n'est dans le cas évident $y = x$.

Il est facile, en suivant le mode de démonstration d'Euler, de démontrer également l'impossibilité de

$$2x^3 \pm 2y^3 = 8z^3 \quad \text{ou} \quad x^3 \pm y^3 = 4z^3.$$

Posons

$$\frac{x+y}{2} = p, \quad \frac{x-y}{2} = q, \quad \text{d'où} \quad x = p + q, \quad y = p - q;$$

$$x^3 + y^3 = 2p(p^2 + 3q^2).$$

Il faut prouver que cette quantité ne peut être égale au quadruple d'un cube, ou que $\frac{p}{2}(p^2 + 3q^2)$, ne peut être un cube.

Il y a deux cas à considérer, suivant que p est ou n'est pas multiple de 3.

1° p n'est pas divisible par 3.

On réduira $p^2 + 3q^2$ en cube en posant

$$p = t(t^2 - 9u^2),$$
$$q = 3u(t^2 - u^2).$$

Il faut encore que $\frac{p}{2}$ ou $\frac{t}{2}(t + 3u)(t - 3u)$ soit un cube. Ces trois facteurs, étant premiers entre eux, doivent être chacun un cube.

Si $t + 3u = f^3$ et $t - 3u = g^3$, il vient

$$2t = f^3 + g^3,$$

(*) Les deux premières parties de ce théorème ont été posées en question, sous le n° 749, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* où cette solution n'a été que très sommairement indiquée, faute de place.

ou

$$4\frac{t}{2} = f^3 + g^3 = 4h^3,$$

et on aurait deux cubes beaucoup plus petits, dont la somme serait le quadruple d'un cube.

2° $p = 3r$, la formule devient

$$\frac{3r}{2}(9r^2 + 3q^2) = \frac{9r}{2}(3r^2 + q^2).$$

On transforme $3r^2 + q^2$ en cube, en posant

$$q = (t^2 - 9u^2)t,$$
$$r = 3u(t^2 - u^2);$$

d'où

$$\frac{9r}{2} = 27\frac{u}{2}(t^2 - u^2).$$

Il faut que $\frac{u}{2}(t+u)(t-u)$ soit un cube. Comme ces trois facteurs sont premiers entre eux, il faut que chacun soit un cube.

Soit

$$t + u = f^3,$$
$$t - u = g^3;$$

d'où $\qquad 2u = f^3 - g^3, \quad$ ou $\quad 4\frac{u}{2} = f^3 - g^3.$

Mais $\frac{u}{2}$ doit être un cube; nous aurions, en bien plus petits nombres, deux nombres dont la différence serait le quadruple d'un cube.

Puisqu'on ne peut assigner, en petits nombres, des cubes tels que leur somme ou leur différence soit le quadruple d'un cube, il est clair que cela n'a pas lieu non plus pour les grands nombres.

SECONDE NOTE

SUR LES CERCLES RADICAUX ET ANTI-RADICAUX

Par M. **Juan J. Duran-Loriga**
Commandant d'Artillerie à la Corogne.

(*Suite*; 1897, voir p. 29)

Si nous cherchons les circonférences radicales du faisceau que l'on obtiendrait, et de la circonférence donnée, elles passeront par le point ρ, d'où il suit que l'on aura les susdites lignes en joignant un point quelconque du diamètre perpendiculaire à HK avec le centre O; puis, en prenant comme centre le milieu I de cette droite et pour rayon la distance $I\rho$.

Si la circonférence (O) dégénère aussi en un *cercle point*, nous aurons à trouver la circonférence anti-radicale d'un point O par rapport à un autre point ρ; il est facile de voir, qu'il suffira, pour l'obtenir, de prolonger $O\rho$ d'une longueur $\rho O' = O\rho$. On a ainsi le centre O'; le rayon R' aura pour valeur $d\sqrt{2}$; il en résulte, par conséquent, que la circonférence anti-radicale d'un point par rapport à un autre point est toujours réelle et que ces deux points sont inverses par rapport à la circonférence.

Si le point O reste fixe et que l'autre se meuve sur la ligne $O\rho$, l'hyperbole équilatère H, enveloppe des cercles anti-radicaux, que nous considérons dans le cas où nous associons une circonférence et un point, dégénère dans ce cas en deux droites qui ont pour équation

$$y = \pm x;$$

ce sont les asymptotes de l'hyperbole H.

Puisque deux points et la circonférence anti-radicale sont tels que les susdits points sont *les points limites*, nous pourrions citer plusieurs propriétés correspondantes ; nous nous bornerons à énoncer la suivante, que nous aurons à utiliser dans la suite.

Si l'on joint un point quelconque A, *du plan, aux deux points* O *et* ρ *et que, sur les extrémités de* AO *et* $A\rho$, *on élève des perpendiculaires, ces droites et la polaire de* A *par rapport à la circonférence anti-radicale correspondant aux points* O, ρ, *sont concourantes.*

Si l'on veut trouver le lieu géométrique des points d'intersec-

tion de ces droites, lorsque A décrit une certaine ligne, il faudra avoir recours aux formules suivantes, bien faciles à obtenir,

$$x = d - X, \quad y = \frac{X(X - d)}{Y};$$

en appelant d la distance $O\rho$, et en prenant pour axes cartésiens la droite $O\rho$ et la perpendiculaire en O. Ces formules font voir que si le point A décrit une droite passant par O, le point correspondant décrit une autre droite, perpendiculaire, en O, à la première. Lorsque le point A décrit une droite parallèle à l'axe des y, le point correspondant décrit une autre parallèle.

Si le point décrit une parallèle à l'axe des x, l'autre point décrit une parabole. Tout cercle qui passe par $O\rho$ se correspond à lui-même. A la parabole ayant pour équation $x^2 = 2py$, correspond une hyperbole, etc...

Etant donnée une circonférence (O′), sur un de ses diamètres, il n'y a que deux points O et ρ (ou les symétriques par rapport à O′), tels que le cercle anti-radical de O par rapport à ρ soit (O′). Nous pourrions nommer ces points, ainsi liés à chaque circonférence du plan, *points radicalement associés à la susdite circonférence.* Si l'on ne fixe pas le diamètre, dans ce cas les lieux géométriques de O et ρ sont deux circonférences concentriques à la proposée ; le rayon de l'une est double de celui de l'autre et celui de (O′) est, par rapport à ceux-ci, la moyenne proportionnelle. Nous pourrions donner aussi à ces cercles la dénomination de *cercles radicalement associés à* (O′). D'ailleurs, et en vertu de ce que nous venons de dire, on peut déduire la proposition suivante.

On considère une circonférence de centre O *et ses deux circonférences radicalement associées, et l'on trace un rayon quelconque* oabc (a, b et c sont les points où il coupe successivement les trois circonférences). *Si nous joignons un point quelconque* A *du plan aux points* a *et* c *et que nous élevions des perpendiculaires, en ces points, aux droites obtenues, les perpendiculaires et la polaire de* A *par rapport au cercle donné sont concourantes.*

Si l'on prend en particulier le point A sur la circonférence donnée (O) il en résulte cette autre proposition.

Les perpendiculaires aux extrémités des droites qui joignent un point A *d'une circonférence aux extrémités d'un même*

rayon des circonférences radicalement associées se coupent sur la tangente en A *à la circonférence primitive; par conséquent, cette tangente est le lieu géométrique des intersections de toutes les perpendiculaires relatives au point* A.

Si les coordonnées de deux points A et A′ sont respectivement a et b, a' et b' l'équation de la circonférence anti-radicale de A par rapport à A′ est :

$$x^2 + y^2 + 2(a - 2a')x + 2(b - 2b')y + 2(a'^2 + b'^2) - (a^2 + b^2) = 0.$$

(*A suivre*).

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir 1897, page 38)

MÉTHODE DES INDIVISIBLES

Les grecs, amoureux du plastique, n'avaient pas su dégager l'idée de l'infini. Leur système cosmique rétrécissait l'univers, comme leur mythologie rétrécissait la nature; Leucippe et Démocrite, qui avaient imaginé les atomes et proclamé l'existence de mondes sans nombre, n'avaient obtenu qu'un succès relatif; la méthode d'exhaustion contenait bien, en germe, la méthode infinitésimale, mais — pour se mettre à l'abri des disputes des rhéteurs, — ils n'en avaient pas exprimé le principe, et à chaque fois qu'ils l'employaient, il fallait recommencer toute la période des démonstrations. Satisfaits des résultats particuliers obtenus à l'aide de ce merveilleux instrument, ils n'avaient pas cherché à le rendre plus simple et plus commode.

Mais, au XVIe siècle, le sentiment de l'infini se faisait jour et gagnait d'autant plus de terrain que, — sous l'influence du prodigieux souffle de vie qui animait la production des savants de la Renaissance, — on commençait à s'attaquer à la Scolastique, — cette roue majestueuse tournant à vide, — et que la raison, se révoltant contre l'autorité d'Aristote, tentait de rejeter les béquilles avec lesquelles il avait voulu qu'elle se promenât à sa suite. Bernard Palissy ramène la philosophie à l'étude de la nature; Galilée crée la méthode expérimentale; l'invention du

télescope et du microscope rend palpable, pour ainsi dire, l'existence de l'infiniment grand et de l'infiniment petit; l'infini mathématique, qu'on voyait déjà dans les écrits d'Oresme et de Cusa, est devenu familier aux esprits. C'est alors que naquit la *méthode des indivisibles*.

KEPLER

On peut considérer Kepler comme l'auteur de cette méthode. Servi par une puissante faculté de travail et une imagination brillante et aventureuse, il avait osé concevoir comme accessible à l'esprit humain, la découverte des lois du mouvement des corps célestes et entreprendre cette recherche, qu'il put mener à bonne fin, en déduisant de l'observation et d'immenses calculs d'essai les lois qui portent son nom, — les plus générales que nous connaissions dans la nature — lois alors empiriques, il est vrai, mais dont Newton a révélé plus tard l'exactitude.

Le génie novateur de Kepler a aussi ouvert à la Géométrie des horizons nouveaux particulièrement dans la partie dont nous retraçons l'histoire. S'étant occupé incidemment de l'évaluation de la contenance des tonneaux, il imagina (*nova stereometria doliorum*, Linz, 1615), de considérer les corps produits par la révolution des sections coniques — non plus autour de leur axe, ce qu'avait fait en partie Archimède — mais autour d'une droite quelconque de leur plan, ce qui lui donna quatre-vingt-sept solides nouveaux, auxquels il imposa des noms spéciaux et dont il essaie de trouver la cubature. Le grand nombre de problèmes qu'il s'était proposés — et qu'il ne résout du reste que pour le cas du cercle et d'une ellipse dont un des axes est parallèle à l'axe de rotation, — l'amenèrent à chercher la simplification des méthodes connues. Il aborde franchement l'idée de l'infini : ainsi la circonférence est un polygone d'une infinité de côtés; le cercle est composé d'une infinité de triangles ayant pour sommet commun le centre, pour hauteur, le rayon, et pour bases les côtés infiniment petits de la circonférence. La sphère peut être considérée comme l'assemblage d'une infinité de cônes ayant leur sommet commun au centre et leurs bases formées des parties infiniment petites de la surface sphérique.

Mais sa méthode repose surtout sur l'idée de la transformation

des figures et l'emploi de la proposition générale suivante, que nous appellerons *théorème de Kepler*, bien qu'il ne l'ait pas énoncé formellement, et encore moins démontré.

(G) *Si deux solides compris entre deux plans parallèles sont tels qu'un plan quelconque parallèle entre les deux premiers coupe les deux solides suivant deux sections égales, ces deux solides ont des volumes égaux.* Cette proposition peut se démontrer aisément à l'aide du théorème d'Archimède (F) et du théorème d'Eudoxe (A), en montrant préalablement que deux cylindres de même hauteur et à bases quelconques mais égales sont égaux. L'extension est facile au cas où le plan sécant détermine des sections en proportion constante, ainsi qu'à celui de deux figures planes comprises entre deux parallèles et telles qu'une transversale parallèle quelconque y détermine deux segments proportionnels.

Nous avons dit que Kepler a trouvé le volume produit par un cercle ou une ellipse tournant autour d'une parallèle quelconque à un axe (*annulum*, aujourd'hui *tore*, si la droite est extérieure, et *malum* si elle est intérieure). Voici, par exemple, l'ingénieuse construction qu'il donne pour ce dernier cas. Sur le demi-cercle ou la demi-ellipse (*fig.* 20) (*) comme base, construisons un cylindre droit que nous couperons par un plan passant par l'axe AC et le point E situé sur la génératrice BE à une hauteur BE égale à la circonférence ayant BD pour rayon. Un plan quelconque $M\mu m$, parallèle au plan EBD, coupe ce solide suivant un triangle égal au cercle ayant μm pour rayon. Par conséquent, ce solide et celui, — sphère ou sphéroïde, — produit par la révolution de ABC autour de AC sont dans le cas du théorème (G) et sont par conséquent égaux. Par la parallèle MP à AC, menons deux plans $M\pi$, MNP, l'un perpendiculaire, l'autre parallèle au plan ABC. Le volume proposé produit par la révolution de MNP autour de MP égale le solide MPNE; en effet, menant le plan STR parallèle au plan EDB, on voit que SR égale la circonférence ayant TR pour rayon. Or, le solide MPNE se déduit du solide AECB en en retranchant d'abord deux fois le solide $AM\mu m$

(*) Nous avons substitué à la figure donnée par Kepler, une autre figure, plus claire et plus complète.

égal au volume obtenu en faisant tourner le segment $A\mu m$ autour de sa flèche, volume qu'Archimède a appris à mesurer; ensuite le prisme $p\mu M$; enfin le cylindre $M\pi BN$.

On comprend que les esprits durent être frappés de la simplicité des procédés de Kepler et qu'on dût essayer de les étendre et d'établir ses principes sur des bases rigoureuses. Aussi voit-on Guldin, G. de Saint-Vincent, Cavalieri, Descartes, Fermat, Roberval, Tacquet, Pascal, s'inspirer des idées lumineuses contenues dans l'ouvrage de Kepler.

(*A suivre*).

EXERCICES (*)

9. — *En un point* M *d'une ellipse, de centre* O, *on mène la normale sur laquelle on prend deux longueurs* MN, MN′ *égales au demi-diamètre* OM′, *conjugué de* OM. *On prend aussi sur la normale en* M′, *deux points* N_1, N'_1 *tels que* $M'N_1 = M'N'_1 = OM$. *Montrer que si* N *et* N_1 *sont situés chacun du même côté de la tangente en* M *et de la tangente en* M′ :

1° *La somme des carrés des côtés du quadrilatère* $NN'N'_1N_1$ *est constante et égale à la somme des carrés des axes de l'ellipse donnée;*

2° *Lorsque* M *se déplace sur l'ellipse donnée, chacune des droites* NN_1 *et* $N'N'_1$ *enveloppe un cercle.*

10. — *Rendre rationnelle l'équation*

$$b^2(ax)^{\frac{4}{3}} - a^2(by)^{\frac{4}{3}} = a^2b^2\left[(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

11. — *On considère une parabole* P *et une droite* D *parallèle à l'axe de* P. *Soient* M *un point quelconque pris sur* D *et* AB *la corde polaire de* P *par rapport à* M. *Montrer que :* 1° *le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* MAB *est une droite perpendiculaire à l'axe;* 2° *le lieu de l'orthocentre du triangle* MAB *est une ligne droite passant par le sommet de la parabole.*

12. — *Soient* A′, B′, C′ *les pieds des hauteurs d'un triangle* ABC. *On prend sur chacun des côtés le point conjugué harmo-*

(*) Par M. Barisien.

nique du pied de la hauteur par rapport aux extrémités du côté : soient A″, B″, C″ *ces points.*

Montrer que :

1° *Les droites* AA′, BB″ *et* CC″ *sont concourantes ;*

2° *Les droites* BB′, AA″ *et* CC″ *sont concourantes ;*

3° *Les droites* CC′, AA″ *et* BB″ *sont concourantes ;*

4° *Calculer l'aire du triangle formé par les trois droites* AA″, BB″, CC″, *en fonction des côtés du triangle* ABC.

13. — *Calculer à* 0,001 *près l'expression* (*)

$$\frac{\pi^\pi \times e^e}{\pi^e \times e^\pi} - 1.$$

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. A. Mannheim..... Par un point fixe o, on mène un plan normal à une surface $[m]$ en un point m de cette surface. Dans ce plan, on élève, du point o, une perpendiculaire à om, et l'on porte sur cette droite le segment om_1 égal à om. Lorsqu'on fait varier la position du point m sur $[m]$, le point m_1 se déplace sur une surface $[m_1]$, qui est la *surface apsidale* de $[m]$.

Il résulte de cette définition et de la solution de la question 697 (page 23) que *l'apsidale d'un plan* (P), par rapport à un point arbitraire o est *un cylindre de révolution* dont l'axe est la perpendiculaire abaissée de o sur (P) (**).

La solution de la question 698 (page 48) montre que *l'apsidale de ce cylindre de révolution*, par rapport au même point o, se compose d'*une sphère de centre* o, *du plan* (P) *et de son symétrique par rapport à* o.

Les questions 697 et 698 conduisent donc à ce résultat :

Si un cylindre de révolution est l'apsidale d'un plan, ce plan, seul, n'est pas l'apsidale de ce cylindre.

D'une façon générale, j'ai montré (***) que, contrairement à ce qui avait été dit : *Si* A *est l'apsidale de* B, *cette dernière surface*

(*) On trouvera une valeur voisine de 0,06.

(**) La solution de la question 697 donne aussi la réponse à la question 942 posée dans l'*Intermédiaire des Mathématiques.*

(***) *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 15 juin 1896.

n'est pas l'apsidale complète de A, *par rapport au même pôle*, ou encore : *Deux surfaces ne peuvent être apsidales l'une de l'autre.*

BACCALAURÉATS

(AVRIL 1896).

Académie de Lyon.

1° *Questions au choix* : (*a*) Décomposer le trinôme $x^4 + px^2 + q$ en un produit de deux trinômes du second degré ;

(*b*) Exposer la théorie des annuités ;

(*c*) Progressions géométriques ; sommation des termes d'une telle progression. Entre deux nombres donnés a et b insérer n moyens géométriques.

2° *Problème* (obligatoire). — On donne une sphère dont le rayon $R = 4$, et l'on demande de trouver le rayon de la base et la hauteur de cône de volume minimum circonscrit à cette sphère.

Académie de Montpellier.

Calculer les côtes d'un triangle isoscèle connaissant : l'aire de ce triangle et la surface totale du cône qu'il engendre en tournant autour de sa hauteur. Discuter.

Académie de Nancy.

1° *Questions au choix :* (*a*) Démontrer que toutes les lignes trigonométriqu.s de l'arc a s'expriment rationnellement en fonction de tang $\frac{a}{2}$;

(*b*) Connaissant tang a, calculer sin $\frac{a}{2}$. — Discuter.

(*c*) Résolution trigonométrique de l'équation du second degré.

2° *Problème.* — Etudier la variation du quotient :

$$\frac{21x^2 - 8x - 5}{14x^2 - 31x - 15},$$

quand x varie d'une façon continue de $-\infty$ à $+\infty$.

Académie de Poitiers.

1° *Questions au choix :* (*a*) Démontrer les formules d'addition pour le sinus et pour le cosinus.

(*b*) Connaissant tang a, calculer tang $\frac{a}{2}$. — Discussion.

(*c*) Démontrer qu'entre les angles et les côtés d'un triangle quelconque existent les relations

$$a = b \cos C + c \cos B,$$
$$b = c \cos A + a \cos C,$$
$$c = a \cos B + b \cos A.$$

Déduire de là les formules :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

2° *Problème.* — Une pyramide régulière a pour base un carré. Dans chacun des triangles isoscèles qui forment les faces latérales, on représente la base par $2a$, les autres côtés par y, la hauteur opposée au côté $2a$ par h, la hauteur opposée aux côtés y par x. Calculer x, et calculer le cosinus de l'angle plan qui mesure l'angle dièdre de deux faces latérales. Comment varie cet angle lorsque h décroît à partir de $+\infty$?

Académie de Rennes.

1° *Questions au choix* : (*a*) Dans quel cas dit-on que des relations entre plusieurs variables sont distinctes? Combien y a-t-il de relations distinctes entre les six lignes trigonométriques d'un même angle? Les trouver et montrer pourquoi elles sont distinctes. En déduire les valeurs de $\sin x$ et de $\cos x$ en fonction de $\operatorname{tg} x$.

(*b*) Calculer $\sin \frac{x}{2}$ et $\cos \frac{x}{2}$ en fonction de $\sin x$. Discuter.

(*c*) Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux. Discussion.

Problème. — On forme : 1° le carré de la somme des carrés des deux entiers consécutifs a, $a - 1$, 2° le carré du double $2a$ du plus grand de ces deux nombres ; montrer que dans la division de ces deux carrés, la partie entière du quotient et le reste sont aussi des carrés. Si a est le nombre qui suit immédiatement un carré, le reste est le carré qui suit immédiatement le quadruple du quotient.

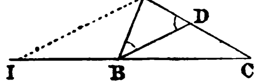
Académie de Toulouse.

Aux extrémités A et B d'un diamètre d'une circonférence donnée de rayon R et de centre O, on mène les tangentes AC et BD à cette circonférence et l'on désigne par C et D les points d'intersection avec une tangente CD de la circonférence. 1° Démontrer que le triangle COD est rectangle et que $AC \times BD = R^2$; 2° Déterminer la tangente CD de manière que l'aire du trapèze ACDB soit équivalente à celle d'un carré de côté donné a ; 3° Déterminer le minimum de l'aire du trapèze ACDB lorsque la tangente CD, menée au cercle, varie.

QUESTION 703

Solution par M. Rebeix (Lycée du Puy).

Si dans un triangle ABC *on suppose* $b = 2c$, *la bissectrice extérieure de l'angle* A *est parallèle à la médiane issue du sommet* B.



En effet, traçons BD parallèle à AI. On sait que le triangle BAD est isoscèle. Donc D est le milieu de AC.

Nota. — Solutions analogues par MM. Jorge d'Avillez, Plakhowo, E. Foucart, Angel Bozal Obejero, à Madrid, Droz-Farny, L'Huillier, F. Dauzats, Goyens.

QUESTION 705

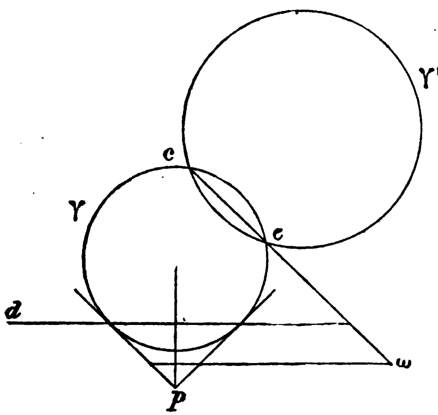
Solution par M. L'Huillier.

A, B, P *étant trois points donnés et* D *une droite fixe, on considère toutes les coniques* Γ *passant par les deux points* A, B *et pour lesquelles* P *est le pôle de* D :

1° *Les secondes cordes communes aux coniques* Γ *et à une conique* Γ' *menée par les points* A *et* B, *passent par un point fixe* M.

2° *Lorsque la conique* Γ' *varie, le point* M *engendre une ligne droite.* (V[ve] F. Prime).

Projetons la figure de façon que les points A et B deviennent les points cycliques, les coniques Γ se transforment en cercles γ ayant même axe radical à savoir la parallèle à d à égale distance de d et p. La conique Γ' devient un cercle quelconque γ' et la corde commune ce passe par un point fixe ω sur l'axe radical des cercles γ.



Si γ' varie, ω décrit l'axe radical des cercles γ.

Nota. — Autres solutions de MM. F. Dauzats, Droz-Farny, Sollertinsky, en prenant pour base de la démonstration le théorème dû à Sturm (si trois coniques ont une corde commune, les trois autres cordes sont concourantes).

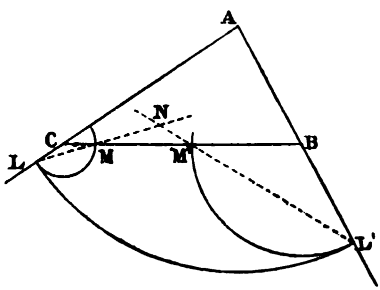
QUESTION 683

Solution, par M. A. Droz-Farny.

Les points remarquables du plan d'un triangle qui se construisent avec le plus de simplicité sont : le centre du cercle circoncrit qui n'exige que douze opérations élémentaires, le centre de gravité et l'orthocentre qui en exigent seize. Montrer qu'on peut construire le point de Nagel, dont les coordonnées normales

sont : $\frac{p-a}{a}$, $\frac{p-b}{b}$, $\frac{p-c}{c}$ *et le point* M *qui a pour coordonnées normales* $\frac{2a-p}{a}$, $\frac{2b-p}{b}$, $\frac{2c-p}{c}$, *l'un et l'autre aussi avec seize opérations élémentaires, et qu'il en est de même des transformés continus de ces deux points. La démonstration peut se déduire presque immédiatement de la valeur donnée des coordonnées.* (E. Lemoine).

Les coordonnées normales du point N de Nagel étant $\frac{p-a}{a}$, etc.., si l'on prend en coordonnées cartésiennes pour axes des x et des y respectivement les côtés CB et CA du triangle de référence ABC, on a immédiatement pour les coordonnées $x = a - \frac{ab}{p}$, $y = b - \frac{ab}{p}$ d'où $x - y = a - b$, ce qui détermine une droite contenant N et parallèle à la bissectrice de l'angle ACB ; on aurait de même une droite contenant N et parallèle à la bissectrice de l'angle ABC. On en déduit la construction suivante : de A décrivons la circonférence A(a) qui coupe AC et AB en L et L'. Opération ($3C_1 + C_3$).



Décrivons de C la circonférence C(CL) qui coupe CB en M, et de B la circonférence B(BL') qui coupe BC en M'. Op : ($4C_1 + 2C_3$). Les droites LM et L'M' se coupent en N. Op : ($4R_1 + 2R_2$). Op : totale [$4R_1 + 2R_2 + 7C_1 + 3C_3$].

Simplicité 16 ; exactitude 11 ; deux droites et trois cercles.

Pour le point M, on trouverait $x = \frac{2ab}{p} - a$, $y = \frac{2ab}{p} - b$, d'où $x - y = b - a$ et des formules analogues pour les transformés continus de ces deux points. Les constructions géométriques sont donc analogues.

QUESTION 701

Solution, par M. H. L'Huillier.

Résoudre et dicuter l'équation

$$\sin^{10}x + \cos^{10}x = a.$$

(*E. N. Barisien*).

On a $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

élevant au carré

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x.$$

Multipliant membre à membre, on a

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x;$$

multipliant membre à membre les deux dernières, on a

$$\sin^{10}x + \cos^{10}x = 1 - 5\sin^2 x\cos^2 x + 5\sin^4 x\cos^4 x.$$

L'équation proposée se réduit à

$$\sin^4 2x - 4\sin^2 2x = \frac{16}{5}(a - 1),$$

équation bicarrée dont la discussion n'offre aucune difficulté.

Nota. — Solution analogue par M. Plackowo.

QUESTIONS PROPOSÉES

793. — D'un point O, pris arbitrairement sur le plan d'un triangle donné, on mène une parallèle à l'un des côtés de ce triangle et l'on prend l'harmonique conjugué de O par rapport aux points où elle coupe les deux autres côtés. Les points obtenus ainsi sur les parallèles menées de O aux trois côtés du triangle appartiennent à une même droite. (*Mannheim*).

794. — On donne une circonférence de cercle et l'un de ses diamètres. D'un point M de la circonférence on abaisse sur ce diamètre la perpendiculaire MP, que l'on partage en M′ dans un rapport donné. On mène la droite M′T, qui joint le point M′ au point T où la tangente en M au cercle rencontre le diamètre donné. De l'un des points où M′T coupe le cercle on lui élève une

perpendiculaire. Cette droite coupe le diamètre en un point F qui est le même, quel que soit M sur le cercle : c'est ce qu'on propose de démontrer sans considérer l'ellipse, lieu de M', et sans utiliser les propriétés correspondant à cette considération.

(*Mannheim*).

795. — Quelqu'un place une somme inconnue X dans une entreprise. Chaque année il retire unesomme A qui lui est nécessaire pour vivre et, malgré tout, cette entreprise rapporte chaque année $\frac{1}{3}$ *de ce qui reste*, quelle est la somme X, sachant qu'au bout de n années $\frac{1}{2}$, le capital X a été doublé. (*Elgé*).

796. — Etant donné un triangle AOB rectangle en O; on prolonge OA au-delà du point A de la longueur $AA' = OB$, et on prolonge OB au-delà du point B de la longueur $BB' = OA$. Montrer que l'hypoténuse AB est vue du point milieu de A'B' sous un angle droit. (*E. N. Barisien*).

797. — Dans tout triangle ACB, rectangle en C, on a les relations suivantes entre les rayons des quatre cercles tritangents au triangle ACB.

(*Les lettres* a, b, c, p *ont leur signification habituelle*),

$$r_a + r_b = c,$$
$$2r_c = p,$$
$$r + r_c = a + b,$$
$$r + r_a + r_b + r_c = 2p,$$
$$r + r_a + r_b = r_c,$$
$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b}.$$

(*E. N. Barisien*).

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

SUR LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. A. Tissot

(*Suite*, 1897, page 49)

46. — *Pour tout cercle bitangent, la demi-corde principale d'un point quelconque de l'ellipse, ou la tangente menée d'un point quelconque de l'hyperbole, est, avec la distance du même point à la droite des contacts, dans le rapport de* c *à* b. Nous entendons, par corde principale d'un point intérieur à un cercle, celle dont ce point occupe le milieu.

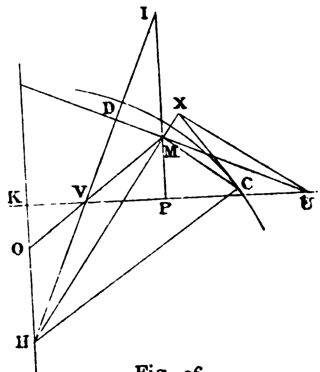


Fig. 26

Soient O (*fig.* 26) le centre d'une ellipse, H celui d'un cercle bitangent, KU la droite des contacts, rencontrant en K l'axe non focal, M un point quelconque de la courbe, MU la tangente en M. L'intersection U de cette tangente avec la droite des contacts appartiendra à la polaire de M par rapport au cercle (4); cette polaire sera donc la perpendiculaire UX abaissée de U sur HM. Puisque M est à l'intérieur du cercle, X sera en dehors ; de ce dernier point, on pourra mener, au cercle, deux tangentes, dont les points de contact seront les extrémités de la corde principale de M. L'un de ces points de contact étant C, le triangle rectangle CHX donnera $\overline{CM}^2 = MH.MX$.

Abaissons, sur KU, MU, les perpendiculaires MP, HD ; soit I, leur intersection. Les points D, X appartiennent à la circonférence qui serait décrite sur HU comme diamètre, et l'on a $MH.MX = MD.MU$. De même, dans la circonférence de diamètre IU, on aurait $MD.MU = MI.MP$. Il vient donc $\overline{CM}^2 = MI.MP$.

Maintenant, si l'on tire OM, cette ligne passera par le point de rencontre V de HD avec KU [4], d'où il suit que les lignes MI, MP sont proportionnelles à OH, OK, par conséquent [45] à c^2, b^2. On a ainsi

$$MI = \frac{c^2}{b^2} MP, \text{ d'où } CM = \frac{c}{b} MP.$$

Si la courbe est une hyperbole, M se trouvera en dehors, et X en dedans, du cercle ; le point de contact de la tangente issue de M sera l'une des extrémités de la corde principale de X, et l'on pourra appliquer, à cette tangente, la démonstration ci-dessus.

De la propriété qui vient d'être établie, il résulte que la droite des contacts est l'un des axes de similitude de trois cercles ayant, pour centres, trois points quelconques de la conique, et, pour rayons, des longueurs égales ou proportionnelles aux cordes principales de ces points, si la courbe est une ellipse, aux tangentes qui en sont issues, si la courbe est une hyperbole.

47. — *Un point étant intérieur à un cercle bitangent dans le cas de l'ellipse (extérieur dans le cas de l'hyperbole), suivant qu'il sera intérieur ou extérieur à la conique, il y aura un rapport plus grand ou plus petit que celui de* c *à* b *entre la demi-corde principale de ce point (la tangente qui en est issue) et la distance du même point à la droite des contacts.*

En effet, pour les divers points d'une perpendiculaire au second axe, la distance à la droite des contacts est la même, tandis que, le point s'éloignant du pied de la perpendiculaire, sa distance au centre du cercle augmente, par conséquent sa corde principale diminue (ou la tangente qui en est issue augmente).

Si, dans le cas de l'ellipse, la perpendiculaire au second axe menée par un point extérieur ne rencontre pas la courbe, son pied sera encore celui de ses points auquel correspondra le plus grand rapport ; or, pour lui, le rapport sera plus petit que pour le sommet voisin, car, de ces deux points, c'est le second dont la corde principale est vue, du milieu de la corde des contacts, sous l'angle le plus grand.

48. — La propriété du § **16** a ici son analogue.

Il en est de même, lorsque la conique est une hyperbole, de la propriété du § **17**, laquelle permet de construire un cercle bitangent à cette hyperbole et tangent à une droite donnée. Mais, dans le cas de l'ellipse, les tangentes au cercle ne rencontrant pas la courbe, c'est à une autre propriété qu'il faut avoir recours :

Deux lignes parallèles se trouvant tangentes, l'une à une ellipse, l'autre à un cercle bitangent, on prolonge, jusqu'à la seconde, le rayon de l'ellipse, mené au point de contact de la

première, et, on prend, dans cette ellipse, la polaire du point d'intersection. On prolonge ensuite les rayons elliptiques des extrémités de la corde polaire jusqu'à leur rencontre avec la tangente à la conique. La demi-longueur de la portion de droite ainsi déterminée sur cette tangente sera dans le rapport de c *à* b *avec la distance, à la droite des contacts, du point dont on a pris la polaire.*

Soient O (*fig.* 27) le centre de l'ellipse, H celui du cercle, K le milieu de la corde des contacts, lequel est situé sur le prolon-

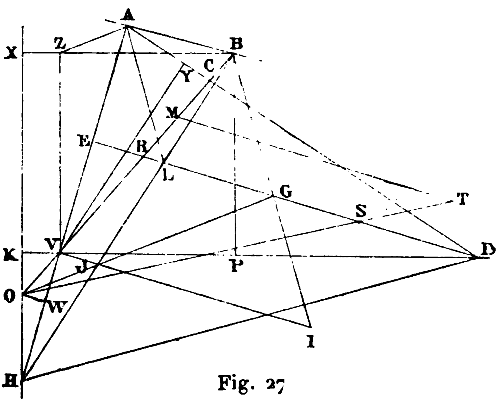


Fig. 27

gement de HO, AB la tangente au cercle en un point A, V l'intersection du rayon AH avec la droite des contacts. Le point M de la conique où la tangente est parallèle à AB se trouvera sur OV [**4**]; soit B l'intersection de AB avec le prolongement de OM. La polaire de B par rapport au cercle, c'est-à-dire la perpendiculaire AC abaissée de A sur HB, rencontre la droite des contacts en un point D qui appartiendra à la polaire de B par rapport à l'ellipse [**4**]; celle-ci sera donc la parallèle menée par D à AB; elle rencontrera les droites AH, BH, BO et la courbe en des points E, L, R et S. Prolongeons OS jusqu'à son intersection T avec la tangente en M à l'ellipse, et abaissons BP perpendiculaire sur KV. Il faut démontrer que le rapport de MT à BP est le même que celui de c à b.

Les lignes AB, ER étant parallèles, on a

$$AV.RV = BV.EV.$$

De ce que D, E, H, K sont sur une même circonférence, on conclut

$$EV.HV = DV.KV.$$

Construisons la polaire de D, qui est la même dans le cercle et dans l'ellipse [1]; ce sera la perpendiculaire abaissée de B sur DH; soit G le point où elle coupe DE; désignons par I et J ceux où la parallèle menée par V à AB rencontre BG et BH. Les segments GL, LR sont proportionnels à IJ, JV. Dans cette proportion, on peut remplacer GL par AB, car DE, BH étant deux des hauteurs du triangle ADH, la troisième hauteur passera par L, de sorte que, si l'on tire AL, cette ligne sera perpendiculaire à HD ou parallèle à BG, et ABGL sera un parallélogramme. D'après cela, la proportion peut s'écrire

$$AB.JV = IJ.LR.$$

Les lignes IV, GR étant parallèles, on a

$$BR.GI = BG.RV.$$

Les triangles semblables BJV, BLR donnent

$$BV.LR = BR.JV,$$

et les triangles ABH, HJV,

$$AH.JV = AB.HV.$$

Abaissons BX perpendiculaire sur le second axe HK, et VY sur AD. Par les triangles semblables BHX, DVY, on aura $DV.BX = BH.VY$, et, par les triangles ABH, AVY, qui sont aussi semblables, $BH.VY = AH.AV$; il vient donc

$$DV.BX = AH.AV.$$

Enfin, les triangles OBX, OKV donnent

$$OB.KV = OV.BX.$$

Multipliant membre à membre les égalités mises à la ligne dans ce paragraphe, on obtient $OB.GI.JV = OV.BG.IJ$, relation entre les segments déterminés, sur les côtés du triangle BIV, par les points O, G, J, et qui prouve que ces trois points appartiennent à

une même droite. Tirons cette droite. Dans le triangle OGR coupé par JV, qui est parallèle à GR, nous aurons

$$OV.GR = OR.JV.$$

Menons OW perpendiculaire à HV. Les deux quadrilatères homothétiques ABPV, OKVW donneront

$$OK.AB = OW.BP,$$

et, les triangles semblables OHW, HKV,

$$OW.HV = OH.KV.$$

De V, abaissons, sur BX, la perpendiculaire VZ, et tirons AZ. Si, sur BV comme diamètre, on décrivait une circonférence, elle passerait en A, en P et en Z, de sorte que les angles VAZ, BVP sont égaux comme ayant pour mesure les moitiés des arcs soustendus par les cordes égales VZ, BP ; mais les angles AVZ, RDV étant aussi égaux, les triangles AVZ, DRV sont semblables. On en conclut, VZ étant égal à BP,

$$DR.AV = DV.BP.$$

Puisque BG est la polaire de D dans l'ellipse, D et G sont conjugués harmoniques par rapport aux deux extrémités de la corde interceptée sur DG ; cette corde a son milieu en R, et RS en est la moitié, on a donc

$$\overline{RS}^2 = DR.GR.$$

De même, puisque DE est la polaire de B, les points B et R sont conjugués harmoniques par rapport à M et au point diamétralement opposé, et l'on a

$$\overline{OM}^2 = OB.OR.$$

Si l'on multiplie membre à membre les égalités mises à la ligne depuis le commencement de ce paragraphe, sauf les cinq premières, et si l'on observe que OH, OK sont proportionnels à c^2, b^2 [45], et OM, OR, à MT, RS, on obtiendra une relation qui ne sera autre chose que la relation à démontrer, dont on aurait élevé au carré les deux membres après l'avoir mise sous forme d'égalité de produits. (*A suivre*).

RELATIONS MÉTRIQUES
ET TRIGONOMÉTRIQUES
ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES
DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **Lecocq**, ancien professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, 1897 ; p. 53).

16. — *Données relatives aux axes de coordonnées rectangulaires.*

Soit un losange $E_1G_1E'G'$; posons :

$$LE_1 = LE' = \alpha$$
$$LG_1 = LG' = \beta,$$

et prenons sur les diagonales prolongées, considérées comme axes de coordonnées, $LQ = \gamma \quad LS = \delta$.

Les droites SE_1 SE' et QG_1 QG' forment en se coupant un quadrilatère inscriptible ABCD.

Les formules : $\frac{\alpha\delta}{\sqrt{\alpha^2+\delta^2}} = r'$, $\frac{\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}} = r''$, représentent les distances du point L aux droites SE_1 et QG_1 de sorte que la relation :

(note 1)
$$\frac{\alpha\delta}{\sqrt{\alpha^2+\delta^2}} = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}},$$

ou
$$\frac{\delta\gamma}{\sqrt{\gamma^2-\delta^2}} = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} \qquad \text{savoir : } a + c = d + b,$$

s'applique au quadrilatère à la fois inscriptible et circonscriptible.

17. — *Coordonnées des points* A, B, C, D, *et formules des côtés* a, b, c, d.

(A)
$$x_1 = -\frac{\alpha\gamma(\delta+\beta)}{\delta\gamma-\alpha\beta}, \quad y_1 = -\frac{\beta\delta(\gamma+\alpha)}{\delta\gamma-\alpha\beta},$$

(B)
$$x_2 = -\frac{\alpha\gamma(\delta-\beta)}{\delta\gamma+\alpha\beta}, \quad y_2 = \frac{\beta\delta(\gamma+\alpha)}{\delta\gamma+\alpha\beta},$$

(C) $$x_3 = \frac{\alpha\gamma(\delta - \beta)}{\delta\gamma - \alpha\beta}, \qquad y_3 = \frac{\beta\delta(\gamma - \alpha)}{\delta\gamma - \alpha\beta},$$

(D) $$x_4 = \frac{\alpha\gamma(\delta + \beta)}{\delta\gamma + \alpha\beta}, \qquad y_4 = -\frac{\beta\delta(\gamma - \alpha)}{\delta\gamma + \alpha\beta},$$

d'où :

$$a = \frac{2\beta\gamma\delta(\gamma + \alpha)\sqrt{\delta^2 + \alpha^2}}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2}, \qquad b = \frac{2\alpha\gamma\delta(\delta - \beta)\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2},$$

$$c = \frac{2\beta\gamma\delta(\gamma - \alpha)\sqrt{\delta^2 + \alpha^2}}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2}, \qquad d = \frac{2\alpha\gamma\delta(\delta + \beta)\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2},$$

qu'on peut écrire :

$$\frac{a}{\beta(\gamma + \alpha)\sqrt{\alpha^2 + \delta^2}} = \frac{b}{\alpha(\delta - \beta)\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}$$
$$= \frac{c}{\beta(\gamma - \alpha)\sqrt{\alpha^2 + \delta^2}} = \frac{d}{\alpha(\delta + \beta)\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} = \frac{2\gamma\delta}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2},$$

et l'on trouvera réciproquement :

$$\frac{\alpha}{(a - c)(d - b)\sqrt{(p - a)(p - c)}}$$
$$= \frac{\beta}{(a-c)(d-b)\sqrt{(p-b)(p-d)}} = \frac{\gamma}{(d-b)(a+c)\sqrt{(p-a)(p-c)}}$$
$$= \frac{\delta}{(d + b)(a - c)\sqrt{(p - b)(p - d)}} = \frac{hl}{(a^2 - c^2)(d^2 - b^2)}.$$

Ce tableau permettra de transformer les formules fonctions de a, b, c, d en formules fonctions de α, β, γ, δ et inversement.

18. — *Exemples de quelques transformations.*

$$h^2 = \frac{8\alpha\beta\gamma^2\delta^2(\delta\gamma - \alpha\beta)\sqrt{\alpha^2 + \delta^2}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{(\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2)^2},$$

$$l^2 = \frac{8\alpha\beta\gamma^2\delta^2(\delta\gamma + \alpha\beta)\sqrt{\alpha^2 + \delta^2}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{(\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2)^2},$$

$$K^2 = \frac{4\gamma^2\delta^2(\alpha^2 + \beta^2)}{\gamma^2\delta^2 - \alpha^2\beta^2} = mn,$$

$$m = \frac{2\gamma\delta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\delta\gamma - \alpha\beta}, \qquad n = \frac{2\gamma\delta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\delta\gamma + \alpha\delta}, \qquad \frac{m}{n} = \frac{\delta\gamma + \alpha\beta}{\delta\gamma - \alpha\beta},$$

(note 2) $$S = \frac{4\alpha\beta\gamma^2\delta^2}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2} = f.\frac{2\gamma\delta}{\sqrt{\delta^2+\gamma^2}} = 2f.\mathrm{LP}' \ (*)$$

$$R = \frac{\gamma\delta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\alpha^2+\delta^2}\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\gamma^2\delta^2-\alpha^2\beta^2}.$$

Soit λ l'angle de $L\omega$ avec SQ, on a :

$$P\omega - LP' = \frac{\sqrt{abcd}-S}{2f},$$

$$PP' = \frac{p\varepsilon(a-c)(d-b)}{4f(a+c)(d+b)} = \frac{\beta^2\gamma^2(\alpha^2+\delta^2) - \alpha^2\delta^2(\beta^2+\gamma^2)}{(\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2)\sqrt{\gamma^2+\delta^2}},$$

d'où

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{4(S-\sqrt{abcd})(a+c)(d+b)}{(a-c)(d-b)\left[(a+c)^2-(d+b)^2\right]}$$

$$= \frac{4(S-\sqrt{abcd})(a+c)(d+b)}{2p\varepsilon(a-c)(d-b)}.$$

Cette expression de tg λ devient indéterminée par l'hypothèse $\varepsilon = 0$ puisque alors $S = \sqrt{abcd}$.

Sa vraie valeur, donnée par la position de la tangente en ω au cercle de diamètre SQ est :

$$\frac{ac(d-b)^2 - bd(a-c)^2}{2(a-c)(d-b)\sqrt{abcd}}.$$

Pour lever l'indétermination, on se servira de :

$$16S^2 = (2a-\varepsilon)(2b+\varepsilon)(2c-\varepsilon)(2d+\varepsilon),$$

en ne gardant que les premières puissances de ε.

On trouvera encore :

$$\mu = \sqrt{\delta^2+\gamma^2},$$

$$f = \frac{2\alpha\beta\gamma\delta\mu}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2}, \quad \gamma^2\delta^2-\alpha^2\beta^2 = \frac{4\theta^2\gamma^2\delta^2}{K^2}, \quad S = \alpha\beta\frac{K^2}{\theta^2},$$

$$SP = \frac{\gamma^2(\alpha^2+\delta^2)(\delta^2-\beta^2)}{\mu(\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2)},$$

$$QP = \frac{\delta^2(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2-\alpha^2)}{\mu(\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2)}, \quad OP = \frac{\delta\gamma(\alpha^2+\delta^2)(\beta^2+\gamma^2)}{\mu(\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2)}.$$

(*) Comme conséquence de la formule $S = 2f \times LP'$, on trouvera que l'aire d'un trapèze isocèle est quadruple de celle du triangle ayant pour sommets : les milieux des diagonales, et le point de rencontre des côtés non parallèles.

19. — *Coordonnées des milieux des diagonales et direction de* HK.

milieu de la diagonale AC $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\delta\gamma - \alpha\beta}, \\ y_1 = -\dfrac{\alpha\beta\delta}{\delta\gamma - \alpha\beta}, \end{cases}$ milieu de la diagonale BD $\begin{cases} x_2 = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\delta\gamma + \alpha\beta}, \\ y_2 = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\delta\gamma + \alpha\beta}, \end{cases}$

d'où

$\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2} = \dfrac{\delta}{\gamma}$, milieu de HK $\begin{cases} x' = -\dfrac{\alpha^2\beta^2\gamma}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2}, \\ y' = -\dfrac{\alpha^2\beta^2\delta}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2}, \end{cases}$

donc, cette droite passe par L et est parallèle à la direction symétrique de SQ par rapport à LS ; elle passe donc par le milieu M de SQ. Le point L partage HK dans le rapport des diagonales, car :

$$\mathrm{SH} = \frac{\gamma\sqrt{\delta^4 + \alpha^2\beta^2}}{\delta\gamma - \alpha\beta}, \quad \mathrm{QH} = \frac{\delta\sqrt{\gamma^4 + \alpha^2\beta^2}}{\delta\gamma - \alpha\beta},$$

$$\mathrm{SK} = \frac{\gamma\sqrt{\delta^4 + \alpha^2\beta^2}}{\delta\gamma + \alpha\beta}, \quad \mathrm{QK} = \frac{\delta\sqrt{\gamma^4 + \alpha^2\beta^2}}{\delta\gamma + \alpha\beta},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{SH}}{\mathrm{SK}} = \frac{\mathrm{QH}}{\mathrm{QK}} = \frac{m}{n},$$

donc SL est bissectrice de $\widehat{\mathrm{HSK}}$ est QL, de HQK.

La circonférence décrite sur SQ comme diamètre est le lieu des points tels que le rapport de leurs distances aux points H et K est égal à $\dfrac{m}{n}$, et si l'on prend, sur LM prolongée, MT = ML, la droite HK est divisée harmoniquement par les points L et T.

Abscisse à l'origine de SK ou α'.

Ordonnée à l'origine de QC ou β' :

$$\alpha' = \frac{hl(d-b)\sqrt{(p-a)(p-c)}}{(a+c)(d+b)^2}, \quad \beta' = \frac{hl(a-c)\sqrt{(p-b)(p-d)}}{(a+c)^2(d+b)},$$

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \alpha'\beta' = \frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma\delta}, \quad \text{d'où} \quad \alpha' = \frac{\alpha\beta}{\delta}, \quad \beta' = \frac{\alpha\beta}{\gamma}.$$

Les points conjugués F, F′, intersections des diagonales avec QL sont liés par la relation MF. MF′ $= \dfrac{\mu^2}{4}$ et, comme, d'autre part, MH. MK $= \dfrac{\mu^2}{4}$ les quatre points H, K, F, F′ sont sur une même circonférence. (*A suivre*).

SECONDE NOTE

SUR LES CERCLES RADICAUX ET ANTI-RADICAUX

Par M. **Juan J. Duran-Loriga**
Commandant d'Artillerie à la Corogne.

(*Suite et fin*; 1897, voir p. 59)

La considération des circonférences radicales et anti-radicales dans la géométrie de triangle, appliquée à des circonférences effectives ou évanouissantes, nous conduirait à des faits bien intéressants, comme nous l'avons observé précédemment dans l'article cité.

Nous nous bornerons à étudier, comme application très simple les circonférences anti-radicales d'un sommet d'un triangle par rapport à un autre.

Soit ABC le triangle proposé et supposons son périmètre parcouru dans un certain sens, par exemple, dans l'ordre alphabétique, nous trouverons la circonférence anti-radicale de A par rapport à B, de B par rapport à C, et de C par rapport à A ; nous les désignerons, respectivement, par

$$(C_1), (A_1) \quad \text{et} \quad (B_1).$$

Nous obtiendrons les centres des circonférences, en prolongeant les côtés (dans le sens que l'on considère) d'une longueur égale à eux-mêmes; quant aux rayons, ils auront pour valeurs, $c\sqrt{2}$, $a\sqrt{2}$ et $b\sqrt{2}$.

Cherchons l'équation du cercle (A_1).

Nous savons que dans la forme indiquée par M. de Longchamps (J. S. 1886, p. 57) l'équation de tout cercle est

$$(\alpha + \beta + \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0,$$

u, v et w, étant les puissances des sommets du triangle par rapport au cercle que l'on considère.

Dans le cas où nous sommes placé l'on a :

$$u = 2b^2 - c^2, \quad v = 2a^2, \quad w = -a^2;$$

l'équation du cercle (A_1) est donc

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[(2b^2 - c^2)\alpha + 2a^2\beta - a^2\gamma\right] - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0.$$

D'une manière analogue, ou par permutation circulaire, l'on obtiendra celles de (B_1) et (C_1).

Si l'on veut avoir le centre radical de (A_1), (B_1) et (C_1) on écrira

$$\alpha : \beta : \gamma = a^2 p_a : b^2 p_b : c^2 p_c.$$

Il coïncide donc avec le centre du cercle circonscrit.

Calculons le rayon du cercle orthotomique.

La puissance de O par rapport à (A_1) est

$$\overline{OA}_1^2 - 2a^2,$$

mais comme

$$\overline{OA}_1^2 = R^2 + 2a^2,$$

il en résulte que le cercle orthotomique a pour rayon R, et coïncide avec le cercle circonscrit.

On devait prévoir ce résultat en observant que les sommets étant les points limités du faisceau auquel appartiennent les cercles anti-radicaux, la circonférence, passant à la fois par les trois sommets, doit être orthogonale à ces cercles ; c'est donc la circonférence orthotomique de (A_1), (B_1), (C_1).

Les polaires du centre du cercle circonscrit par rapport aux cercles que nous étudions, passent par les sommets du triangle tangentiel (*) car les perpendiculaires à OB, OC et OA en leurs extrémités se coupent sur les points en question.

Les polaires dont nous parlons partagent les côtes du triangle fondamental dans le rapport de 2 : 1.

La polaire du sommet A par exemple, par rapport au cercle (A_1) passe par le point A′ symétrique de A par rapport au centre du cercle circonscrit, parce que les perpendiculaires en B et C aux côtés AB et AC se coupent en A′.

Les points B et C étant inverses par rapport au cercle (A_1) il en résulte, que si nous traçons, par C, une corde quelconque mn dans ce cercle, les points m, n, B et A_1 sont *concycliques*.

Comme les points H et K (points où le côté BC coupe le cercle (A_1) sont conjugués harmoniques par rapport à B et C, on a :

$$\frac{HB}{HC} = \sqrt{2};$$

par conséquent, pour un point quelconque n de la circonférence (A_1) on a :

$$\overline{nB}^2 = 2\overline{nC}^2.$$

(*) C'est le triangle formé par les points associés au point de Lemoine.

Ainsi, cette circonférence est le lieu géométrique de points I tels que le carré de IB soit le double du carré de IC.

Les polaires d'un sommet quelconque du triangle par rapport aux cercles (A_1), (B_1) et (C_1) sont concourantes.

Les polaires d'un des points de Brocard, par rapport aux circonférences que nous étudions, passent par le point diamétralement opposé de la circonférence adjointe correspondante. On peut vérifier un fait analogue, si l'on considère les centres isogones et les cercles de Torricelli.

Si sur OA_1, OB_1 et OC_1, comme diamètres, on décrit des circonférences, celles-ci sont les radicales du cercle circonscrit et des cercles (A_1), (B_1) et (C_1). Ainsi on voit d'une autre manière que les axes radicaux de ces derniers passent par O. Les puissances des sommets du triangle par rapport aux cercles de Neuberg et aux cercles (A_1), (B_1) et (C_1) sont égales et de signes contraires ; par exemple, la puissance de C par rapport à N_a est égale, au signe près, à celle de C par rapport à (A_1), c'est, pour ce motif, que les circonférences radicales des cercles énoncés passent par les sommets du triangle fondamental.

L'équation de ces cercles radicaux, par exemple, celle du cercle qui correspond à (N_a) et (A_1) est :

$$(1)\quad (\alpha+\beta+\gamma)\left[(2b^2-c^2)\alpha+3a^2\beta\right]-2a^2\beta\gamma-2b^2\alpha\gamma-2c^2\alpha\beta=0.$$

Si nous voulons calculer le rayon ρ de la circonférence (1), il suffira de substituer dans la formule

$$\rho=\frac{1}{2}\sqrt{2(R^2+R'^2)-d^2},$$

les valeurs

$$R=a\sqrt{2},\qquad R'=\frac{a}{2}\sqrt{\cot^2\omega-3},\qquad d=\frac{a}{2}\sqrt{9+\cot^2\omega},$$

on trouve ainsi

$$\rho=\frac{a}{4}\operatorname{cosec}\omega.$$

L'on pourrait obtenir aussi ce résultat en faisant observer que la droite qui joint C au centre du cercle radical est parallèle et égale à la moitié de BN_a.

Les axes radicaux des cercles de Neuberg et des cercles (A_1), (B_1)

et (C_1) passent par les sommets du premier triangle de Brocard (points semi-réciproques du point de Lemoine) et coupent les côtés du triangle fondamental dans le rapport 2 : 1. Par exemple, l'axe radical de (N_a) et (A_1), passe par le sommet A_1 dont les coordonnées sont

$$\alpha : \beta : \gamma = a^2 : c^2 : b^2.$$

Les polaires du point de Tarry par rapport aux cercles (A_1), (B_1) et (C_1), concourent au point de Steiner.

Le triangle des centres $A_1\ B_1\ C_1$ est triplement homologique avec le fondamental ; A, B, C étant les centres d'homologie et les côtés du premier étant les axes de cette homologie.

Entre les côtés du triangle $A_1\ B_1\ C_1$ on a

$$\overline{A_1B_1}^2 + \overline{B_1C_1}^2 + \overline{A_1C_1}^2 = 7\,(a^2 + b^2 + c^2),$$

c'est-à-dire que la *puissance totale* du premier triangle est sept fois celle du second.

La polaire du sommet B par rapport au cercle (A_1) est la perpendiculaire à BC au point C ; les axes radicaux des mêmes éléments sont les médiatrices.

Dans le cas particulier ou dans un triangle on a

$$c^2 = 2b^2,$$

(A_1) devient le cercle d'Apollonius.

Si le périmètre est parcouru en sens contraire, il en résultera d'autres cercles (A_2), (B_2) et (C_2) ayant des propriétés analogues à ceux des (A_1), (B_1) et (C_1). De la combinaison des uns et des autres on peut déduire d'autres propriétés ; par exemple, les centres radicaux de (N_a), (A_2), (A_1) ; (N_b), (B_2), (B_1) etc., sont les sommets du premier triangle de Brocard.

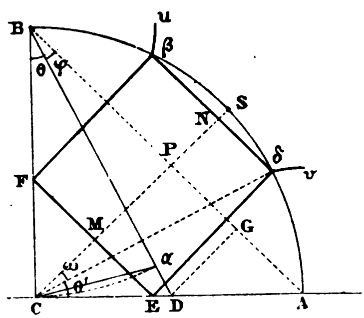
L'on pourrait citer plusieurs autres propriétés ; mais nous nous réservons pour un troisième article l'exposition des applications à la géométrie du triangle, en particulier, qui se déduisent facilement de la considération et des propriétés des *cercles radicaux et anti-radicaux.*

UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE PRATIQUE (*)

Inscrire dans un quadrant de cercle un carré dont l'un des côtés soit parallèle à la corde de ce quadrant.

Soit D le milieu de AC; traçons BD et, de B comme centre, décrivons l'arc $C\alpha$; des points B, A, comme centres, avec une ouverture de compas égale à la corde $C\alpha$, traçons les arcs u, v, qui donnent les points β, δ sur l'arc BSA; $\beta\delta$ est le côté du carré cherché.

Pour le démontrer, abaissons DG perpendiculaire sur AB; nous observerons d'abord que BG = 3AG.



En effet, la bissectrice CS de BCA coupent BA en P, on a

$$AB = 2AP, \quad AP = 2AG;$$

donc $\quad AB = 4AG.$

Pour établir que $\beta\delta$EF est un carré, il faut prouver que, comme conséquence de la construction indiquée, on a

$$2EM = MN, \quad \text{ou} \quad CN = 3EM.$$

Les deux triangles rectangles DGB, δNC doivent être semblables; les angles ω, φ de la figure doivent donc être égaux. Or, on a

$$\theta + \varphi = \theta' + \omega = \frac{\pi}{4};$$

mais $\theta = \theta'$, donc $\varphi = \omega$; etc...

Remarque. — De cette construction, on déduit, comme l'a fait d'ailleurs observer l'auteur de cette question, une démonstration géométrique de l'égalité

$$\text{arc tg}\,\frac{1}{2} + \text{arc tg}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

(*) Extrait, avec traduction libre, du Journal *the Educational Times* (n° du 1er février 1897). Cette construction a été proposée sous le n° 13 306, par M. Sanjana. La présente traduction nous a été obligeamment communiquée par M. Brocard. G. L.

NOTICE HISTORIQUE

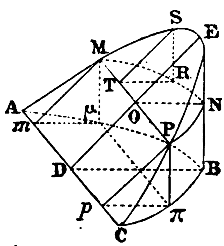
SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir 1897, page 62)

CAVALIERI

La recherche de la solution des problèmes de Kepler paraît avoir conduit Cavalieri, dès 1629, à la découverte de sa méthode des indivisibles (*Geometria indivisibilibus continuorum*, Bologne, 1635). Du moins, — malgré la grande généralité de ses figures et de ses applications, — il l'emploie seulement à quelques-uns de ses problèmes. Elle est le corollaire naturel du théorème d'Archimède : au lieu de diviser la figure plane (ou solide en un nombre fini de parallélogrammes (ou de cylindres) inscrits et circonscrits d'égales hauteurs, il la suppose produite par le mouvement d'une droite (ou d'une surface plane), transportée parallèlement à elle-même, en changeant à chaque instant de forme et de grandeur, suivant une loi qui caractérise la figure ; ou, si l'on veut, il la considère comme divisée en tranches infiniment minces, qu'il appelle des *indivisibles*, comme si elle était composée de droites (ou de surfaces planes) superposées. Ainsi, la surface (ou le volume) de cette figure est, par définition, la somme de toutes les droites, *omnes lineæ* (ou de toutes les sections, *omnia plana*) de la figure, parallèles à une direction (*regula*) donnée. Cavalieri n'entend pas, évidemment,



[Fig. 20 ; appartenant à la p. 64, oubliée par erreur de mise en pages].

(*) Guldin (*De centro gravitatis*, Vienne, 1635), dans le but de mesurer les solides de révolution que n'avait pu traiter Kepler, avait imaginé d'y employer les théorèmes qui portent son nom. D'ailleurs, il ne les démontre pas : la démonstration a été donnée par Antonio Rochas, élève de Cavalieri.

Depuis, Leibniz a remarqué que les théorèmes dits de Guldin s'appliquent à un mouvement quelconque de la figure mobile.

par là, la somme des droites (ou des sections) elles-mêmes, mais celle des parallélogrammes (ou des cylindres) de hauteur infiniment petites, qui ont ces droites (ou ces sections) comme bases. La surface (ou le volume) de cette figure s'obtiendra donc en recherchant la somme des droites (ou des sections) de cette même figure. Comme cette somme est infinie, — ce qui ne mène à aucune conclusion raisonnable, — Cavalieri a recours à un artifice renouvelé d'Archimède, et qui consiste à comparer cette somme infinie à une autre également infinie, ce à quoi il arrive en prolongeant chaque tranche jusqu'au rectangle (ou cylindre) total circonscrit à la figure proposée (*fig.* 21) : au lieu de la surface (ou du volume) $\Sigma.MN$, il n'a qu'à rechercher le rapport $\frac{\Sigma.MN}{\Sigma.KL} = \Sigma \frac{MN}{KL}$.

Il emploie aussi fréquemment l'expression : la somme des carrés (*omnia quadrata*) de telle figure plane. Il entend par là la somme des carrés des droites de cette figure parallèles à une direction donnée, et cette définition doit s'entendre comme la précédente.

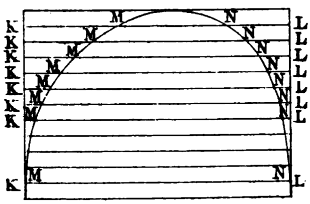


Fig. 21

Nous donnerons de l'important ouvrage de Cavalieri le résumé des propositions les plus intéressantes, en nous servant pour plus de commodité des notations actuellement employées.

GÉOM. INDIV. — LIB. II

III. — *Deux figures planes (ou solides) sont entre elles comme les sommes de leurs droites (ou de leurs plans).* Conséquence de la définition des indivisibles.

(H.) IV. — *Soient deux figures planes (ou solides) comprises entre deux droites (ou deux plans) parallèles. Si une droite (ou plan) quelconque parallèle aux premières détermine dans les deux figures des lignes (ou des plans) qui soient toujours dans le même rapport, il en est de même des surfaces (ou volumes) des deux figures considérées.* Id. Applications à l'ellipse et au sphéroïde.

Ce théorème important, extension de celui de Kepler (G), se démontre rigoureusement à l'aide du théorème d'Archimède (F).

V, VI. — *Les parallélogrammes sont en raison composee de celles (sont comme les produits) des bases et des hauteurs.* Soient les deux parallélogrammes : AE, FH (*fig.* 22). On a

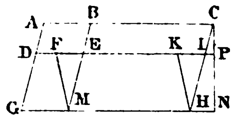


Fig. 22

$$\frac{AE}{DM} = \frac{CP}{PN}, \quad \frac{DM}{FH} = \frac{GM}{MH},$$

d'où, en multipliant

$$\frac{AE}{FH} = \frac{CP}{PN}\frac{DE}{MH}.$$

XV. — *Les figures planes semblables sont comme les carrés des lignes homologues.* Conséquence de III. En effet, les droites parallèles à une même direction dans les deux figures sont comme deux dimensions homologues ; or, ces droites étant équidistantes dans les deux figures, leurs nombres sont dans le rapport des dimensions perpendiculaires à la direction considérée.

XVII. — *Les solides semblables sont comme les cubes des lignes homologues.* Id. Même démonstration.

XIX. — *La diagonale* CF (*fig.* 23) *d'un parallélogramme le divise en deux triangles égaux.* Prenons HF = MC et menons des parallèles à CD ; on a HE = MB, donc toutes les lignes des deux triangles sont égales, et on peut écrire

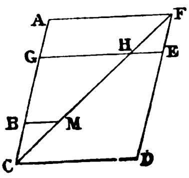


Fig. 23

$$\frac{\Sigma.HE}{\Sigma.GE} = \frac{1}{2}.$$

XXIV. — *Menons la diagonale* EC *du parallélogramme* AEGC (*fig.* 24) : *la somme des carrés des droites du parallélogramme est triple de celle des carrés des droites du triangle* CEG. Menons les médianes BF, DH, et soit RV une transversale parallèle à EG. On a

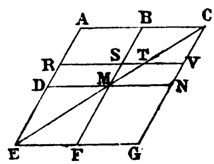


Fig. 24

$$RT^2 + TV^2 = 2.RS^2 + 2.ST^2,$$

donc la somme des carrés des droites de AEC, augmentée de celle

des carrés des droites de CEG, est égale à la somme du double des carrés des droites du parallélogramme EB, du double des carrés de celles de BMC, et du double des carrés de celles de MFE. Par suite, en divisant par 2, on aura

$$\Sigma(\text{carrés des dr. de CEG}) =$$
$$\Sigma(\text{carrés des dr. de EB}) + \Sigma(\text{carrés des dr. de BMC et de MEF}).$$

Or, on a

$$\frac{\Sigma(RS^2)}{\Sigma(RV^2)} = \frac{\Sigma(RS^2)}{\Sigma(4.RS^2)} = \frac{1}{4},$$

d'un autre côté, les droites ST de l'ensemble des triangles BMC, EMF, étant moitiés de celles TV du triangle CEG, disposées dans un autre ordre, leurs carrés en sont le quart, et on a

$$\frac{2\Sigma(ST^2)}{\Sigma(TV^2)} = \frac{1}{4}.$$

Il s'ensuit qu'on a

$$\Sigma(\text{carrés des dr. de CEG}) =$$
$$\frac{1}{4}(\text{carrés des dr. de AG}) + \frac{1}{4}\Sigma(\text{carrés des dr. de CEG}),$$

d'où

$$\frac{\Sigma.TV^2}{\Sigma.RV^2} = \frac{1}{3}\ (*).$$

(Voir la note III). Il suit de là que la pyramide est le tiers du prisme circonscrit, puisque les côtés des diverses sections horizon-

(*) Gergonne a déterminé par des moyens analogues la position du centre de gravité du triangle. Prenons les milieux M, N, P (*fig.* 25) des côtés; on peut admettre comme axiome que les figures semblables ont leurs centres de gravité semblablement placés. Appelons A la surface de chacun des triangles AMN, MBP, MPN, NPC; δ, la distance de leur centre de gravité à leur base; d, la distance analogue du grand triangle, et h sa hauteur. On a, en prenant les moments par rapport à BC

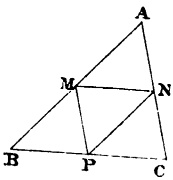


Fig. 25

$$4.A\delta = A\left(\frac{h}{2} + \delta\right) + A\delta + A\left(\frac{h}{2} - \delta\right) + A\delta \quad \text{et } \delta = \frac{d}{2}.$$

d'où
$$d = \frac{h}{3}.$$

tales croissant comme celles d'un triangle, les sections croissent ellles-mêmes comme leurs carrés.

On peut aussi en tirer la quadrature de la parabole, etc.

XXX, XXXI. — *Partageons le parallélogramme* AF (*fig.* 26) *en deux parties par la transversale* EC : *la somme des rectangles* HN.NO *des droites du trapèze* DC *et du triangle* CEF, *est à celle des rectangles* HM.MO *comme* DE *à* $\frac{1}{2}$ DE + $\frac{1}{6}$ DF. En effet, on a, d'après XIX et XXIV,

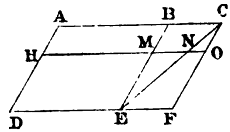


Fig. 26

$$\frac{\Sigma(\mathrm{HN.NO})}{\Sigma(\mathrm{HM.MO})} = \frac{\Sigma(\mathrm{HO.ON})}{\Sigma(\mathrm{DE.EF})} - \frac{\Sigma(\mathrm{ON}^2)}{\Sigma(\mathrm{DE.EF})} =$$

$$\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{DE}}\,\frac{\Sigma.\mathrm{ON}}{\Sigma.\mathrm{EF}} - \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{DF}}\,\frac{\Sigma(\mathrm{ON}^2)}{\Sigma(\mathrm{EF}^2)} = \frac{\mathrm{DF}}{2.\mathrm{DE}} - \frac{\mathrm{EF}}{3.\mathrm{DE}}.$$

(*A suivre*).

EXERCICES (*)

14. — *Démontrer l'identité suivante à* 6 *variables indépendantes* (*somme de* 6 *carrés égale identiquement à une somme de* 5 *carrés*) :

$$(a^2+d^2)^2+(b^2+e^2)^2+(c^2+f^2)^2+(ac+ce+ea)^2+(bd+df+fb)^2$$
$$+ (ab + bc + cd + de + ef + fa)^2$$
$$=(a^2+d^2+bf+ce)^2+(b^2+e^2+ca+df)^2+(c^2+f^2+db+ea)^2$$
$$+ (ab + cd + ef)^2 + (af + ed + cb)^2.$$

15. — *Mettre sous la forme d'une somme de* 3 *carrés, les polynomes suivants :*

$2x^4 + 3x^2y^2 + 6y^4$ (2 solutions),
$2x^4 + x^2y^2 + 2y^4$ (3 solutions),
$2x^4 + 6x^2y^2 + 3y^4$ (3 solutions),
$2x^4 + 5x^2y^2 + 2y^4$ (4 solutions).

(*) Par M. Jan Cyane (14 à 17) ; par M. Droz-Farny (18 à 21).

16. — *Démontrer que le polynome* $2x^4 + 6x^2y^2 + 2y^4$ *est :* 1° *la somme de* 2 *carrés;* 2° *la somme de* 4 *carrés* (6 *solutions*).

17. — *Mettre le carré d'une somme de* 4 *carrés sous la forme d'une somme de* 5 *carrés* (3 *solutions*).

18. — *Deux cercles* O *et* O' *sont tangents extérieurement en* A. *Soit* BB' *une tangente commune; une sécante variable passant par* A *coupe la circonférence* O *en* C *et la circonférence* O' *en* C'; BC *et* B'C' *se coupent en* P. *On demande le lieu du point de Lemoine du triangle* CPC'.

19. — *Construire, des trois sommets d'un triangle rectangle, comme centres, trois circonférences qui se coupent deux à deux orthogonalement.*

20. — *D'un point* P *d'une ellipse on mène le diamètre* PA *et une corde* PB. *Soit* C *le pôle de* AB, *démontrer que* CO *est parallèle à* PB.

21. — *Soit une circonférence variable de centre* O *tangente en* P *à une ellipse donnée et qui coupe cette dernière suivant le diamètre* AOB. *Lorsque le point* P *se meut sur l'ellipse, quelle est l'enveloppe de* AB *et quel est le lieu du centre* O ?

BACCALAURÉAT

(*LETTRES-MATHÉMATIQUES*)

(Juillet 1896)

Académie d'Aix (Faculté de Marseille).

(A) On donne un tétraèdre SABC dont l'arête SA est perpendiculaire au plan ABC.

En égalant les valeurs du carré de BC tirées de chacun des deux triangles ABC et SBC, on obtient une relation que l'on demande d'abord de former.

Ensuite, en introduisant l'arête SA et les angles BSA et CSA, on peut transformer cette relation en une autre où n'entrent plus que des lignes trigonométriques. On demande de faire ce calcul.

On donne enfin AS et AB, et l'on demande de calculer AC de manière que les deux angles BAC et BSC soient égaux tous les deux à un même angle donné.

(B) On considère tous les triangles inscrits dans un cercle de rayon R, ayant pour base une même corde AB = R.

On demande le maximum et le minimum de la médiane issue du point A. On demande aussi quelles sont les surfaces des triangles pour lesquels cette médiane est maximum ou minimum.

(C) On considère tous les quadrilatères ABCD (A, C sommets opposés ; $AB = AD = a$; $cB = cD = 2a$).

1° Dans chacun d'eux on peut inscrire un cercle de rayon R ;

2° Connaissant $AC = b$, trouver BD ;

3° Aire de ABCD, connaissant R : calculer AC ; et déduire le maximum de R.

On donne deux cercles intérieurs l'un à l'autre dont les rayons sont R et r. Le cercle de rayon r passe par le centre A du cercle de rayon R.

Au point A on mène la tangente BC au cercle de rayon r, et par les points B et C, où cette tangente coupe le cercle de rayon R, on mène des tangentes BE et CE au cercle de rayon r. Ces tangentes se coupent en un point E.

1° Calculer, en fonction de R et r, la tangente trigonométrique de l'angle BCE ;

2° Calculer, en fonction de R et r, la distance AE du point E au centre A du cercle de rayon R ;

3° R étant donné, déterminer r de manière que le point E soit sur le cercle de rayon R ;

4° Au point H diamétralement opposé au point A sur le cercle de rayon r, on mène la tangente MM à ce petit cercle. Cette tangente coupe la grande circonférence aux points M et N. Par ces points M et N, on mène à la petite circonférence des tangentes MP et NP qui se coupent en un point P. Démontrer que ce point P est sur la grande circonférence si r a été déterminé en fonction de R de manière que le point E indiqué plus haut soit sur la grande circonférence.

BIBLIOGRAPHIE

Henri de Sarrauton. — L'heure décimale et la division de la circonférence. Brochure de 64 pages. Librairie E. Bernard et Cie. Paris, 53 ter, quai des Grands-Augustins.

La réforme proposée par M. de Sarrauton est certainement la plus pratique de toutes celles qui ont été proposées dans ces derniers temps concernant la façon de compter les heures et la division de la circonférence.

Toutes les qualités de cette réforme sont fort bien exposées dans la note de M. Adolphe Carnot, jointe au mémoire, lequel a d'ailleurs reçu l'approbation de la Société géographique d'Oran, dont le président est le Lieutenant-Colonel Derrien, bien connu par ses travaux de géographie.

Contentons-nous de dire ici que M. de Sarrauton propose de compter les heures de 0 à 24 sans interruption de midi à midi, à partir d'un méridien universel qui toucherait le cap Vert. La circonférence serait divisée en 240 degrés, avec minutes et secondes centésimales. Les heures, tout comme les degrés, seraient divisées en minutes et secondes centésimales, ce qui faciliterait beaucoup les calculs des astronomes, des navigateurs et des géodésiens.

Tout en appréciant au point de vue scientifique les idées de M. de Sar-

rauton, il est cependant à craindre qu'il en soit de cette réforme comme de beaucoup d'autres. L'habitude et la routine triompheront une fois de plus de la logique et du bon sens.

C'est ainsi que la division de la circonférence en 360 degrés, qui est toujours adoptée par les marins et les astronomes, ne l'est pas par les géodésiens, qui, depuis Laplace, emploient la division en 400 grades.

La nouvelle division de M. Sarrauton nécessitant le changement des horloges, la réfection des instruments d'astronomie et de géodésie, ainsi que l'impression de nouvelle tables de logarithmes, il est certain que cette réforme ne saurait être que progressive (*).

Mais il est à souhaiter que, dès à présent, cette réforme soit mise en pratique dans les écoles et dans les grands services publics. E. B.

Choix d'épures de géométrie descriptive et de géométrie cotée, à l'usage des candidats à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr, à l'École navale et à l'Institut agronomique, et des élèves de la classe de Mathématiques élémentaires, par L. Bécourt, professeur aux Lycées Condorcet et Carnot.

(1 volume cartonné in-4°, de 28 planches ; Hachette : Prix, 6 francs).

Le recueil d'épures que M. Bécourt publie aujourd'hui à la librairie Hachette nous semble venir à son heure. Les examens des Écoles spéciales comportent tous une épreuve de géométrie descriptive, et cette partie de l'examen écrit est, particulièrement, redoutée des candidats, qui ne savent comment la traiter pour avoir une note convenable, de laquelle peut, quelquefois, dépendre l'admissibilité.

Il manquait donc aux élèves se présentant à Saint-Cyr, à l'École Navale ou à l'institut agronomique, un guide leur apprenant à faire l'épure exigée à l'examen. L'ouvrage de M. Bécourt vient combler cette lacune. Le professeur qui a écrit ce livre est, depuis longtemps, chargé d'apprendre aux candidats dont nous venons de parler, comment ils doivent traiter cette épreuve ; il est pleinement qualifié pour donner des conseils à cette catégorie d'élèves, et les explications des épures d'examen données dans son livre constituent assurément le meilleur des conseils que l'on puisse donner aux candidats.

Mais, en outre des 27 épures expliquées et construites dans le recueil complet nous devons signaler les conseils pratiques pour la solution graphique d'un certain nombre de problèmes qui se présentent constamment dans la construction d'une épure et qu'il est indispensable de parfaitement posséder. Enfin, M. Bécourt a pris la peine de terminer son recueil par une collection d'exercices, dont quelques-uns ont été donnés aux examens ; les autres ont été exécutés et contrôlés, avant que l'énoncé n'en fût admis dans l'ouvrage ; ces questions fourniront aux professeurs, et aux élèves studieux, d'excellentes épures pour la préparation aux examens. Avec toutes ces qualités, l'ouvrage de M. Bécourt mérite le succès ; nous le lui souhaitons de grand cœur.

(*) Une Commission s'occupe, en ce moment, de cette intéressante question (voir le n° du *Temps* du 4 mars 1897). La numération des heures de 0 à 24, d'après l'article cité, aurait été adoptée par cette commission. G. L.

Nous signalons aussi à l'attention de nos lecteurs les LEÇONS DE MÉCANIQUE à l'usage des candidats à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr, par M. X. ANTOMARI, ancien élève de l'École Normale, Agrégé des Sciences Mathématiques, Docteur es-sciences, professeur en Mathématiques spéciales au Lycée Carnot (Paris, Librairie Nony).

Cet ouvrage, comme tous ceux que M. Antomari a écrits, se recommande particulièrement par l'ordre parfait qui est donné aux matières exposées, la rigueur des démonstrations, et la très grande clarté qui les accompagne. G. L.

QUESTION 696

Solution, par M. A. BOUTIN.

Trouver toutes les solutions entières des deux équations indeterminées :

$$x^2 + 2y = u^2,$$
$$x^2 - 2y = v^2,$$

dans lesquelles x, y, u, v, *sont des inconnues.*

(E. Lemoine).

Par addition, on a

$$2x^2 = u^2 + v^2.$$

Dans le *Journal de Mathématiques Élémentaires*, année 1895, p. 12, Exercices divers, n° 356, cette équation est complètement résolue par l'identité :

$$(2a^2 - b^2)^2 + (2a^2 + b^2 - 4ab)^2 \equiv 2(2a^2 - 2ab + b^2)^2,$$

qui détermine u, v, x, en fonction des indéterminées nouvelles a, b.

On en déduit :

$$y = 2ab(2a - b)(a - b).$$

Nota. — M. Plackowo résout la question en partant de l'identité

$$2(p^2 + q^2)^2 \equiv (p^2 - q^2 + 2pq)^2 + (p^2 - q^2 - 2pq)^2.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

798. — Les cercles C et C′ se coupent au point A où leurs tangentes sont t et t', et au point B. Une droite quelconque menée par A coupe C et en C′ en M ou M′. Les projections orthogonales de M sur t' et de M′ sur t sont sur un même cercle avec les points A et B. (*M. d'Ocagne*).

799. — On donne deux cercles C, C' qui se coupent en *o*. Par ce point, on mène une transversale arbitraire qui rencontre C en *a* et C' en *a'*. Du point *a*, on mène la droite *at* parallèlement au rayon de C' qui passe par *a'* : démontrer que, lorsque la transversale tourne autour de *o*, la droite *at* reste tangente à une circonférence de cercle. (*Mannheim*).

800. — On donne une série de cercles qui se touchent en *a* et une autre série de cercles qui se touchent en *b*. Démontrer que le lieu des points de contact de ces cercles est formé de deux circonférences de cercles qui se rencontrent à angles droits en *a* et *b*.

(*Mannheim*).

801. — Trouver l'aire de l'ennéagone ayant pour sommets les neuf points remarquables du cercle d'Euler. ($A > B > C$) (*).

(*Scholarships, Queen's College, Cambridge*, 1896).

802. — $(n-1)!\sum_{2}^{n}\frac{1}{n-1}$ est divisible par n (impair).

(*Scholarships, St. John's College, Cambridge*, 1895).

803. — Du sommet *b* d'un triangle donné *abc*, on mène des parallèles aux hauteurs de ces triangles, issues de *a* et de *c*.

Ces parallèles et ces hauteurs forment un parallélogramme. Démontrer que la médiane du triangle *abc*, qui est issue de *b*, est perpendiculaire à la diagonale de ce parallélogramme, qui ne contient pas *b*. (*Mannheim*).

(*) Cette question et la suivante nous ont été communiquées obligeamment par M. W. J. GREENSTREET. M. A.

Le Directeur-gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

SUR
LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. A. Tissot

(*Suite*, 1897, page 73)

49. — *Le rayon d'un cercle bitangent est, avec la distance du centre de ce cercle à un foyer de la conique, dans le rapport inverse de l'excentricité.*

Soient O (*fig.* 28) le centre de la conique, F, F′ les deux foyers, H le centre du cercle, S le saillant, KL la demi-corde des contacts. La circonférence circonscrite au triangle rectangle HLS passe en F [44]. Dans cette circonférence, les carrés des deux cordes HL, HF sont entre eux comme les projections HK, OH sur le diamètre HS, c'est-à-dire comme a^2 est à c^2 [45]. On a donc, en appelant r' le rayon HL,

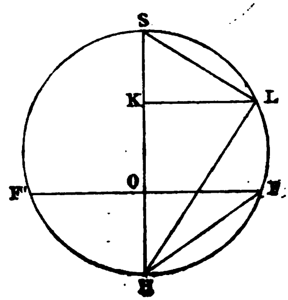


Fig. 28

$$r' = \frac{a}{c}\,\text{HF}.$$

D'après cela, dans tout cercle bitangent, les diamètres qui passent par les foyers ont leurs extrémités sur les tangentes à la conique menée aux sommet de l'axe focal.

La distance du centre du cercle à un foyer, le rayon de ce cercle, la demi-corde principale du foyer, dans le cas de l'ellipse (la tangente issue du foyer, dans le cas de l'hyperbole) ont des longueurs proportionnelles à c, a, b.

Quand le cercle varie, la corde principale du foyer, dans le cas de l'ellipse, est vue, du centre du cercle, sous un angle constant, et le cercle lui-même, dans le cas de l'hyperbole, est vu du foyer sous un angle constant.

50. — *Dans l'ellipse, la demi-corde des contacts est dans le rapport de* a *à* b *avec la moyenne proportionnelle entre les distances du milieu de la corde aux sommets du petit axe.*

La démonstration est analogue à celle qui a été donnée à propos des cercles bitangents de première espèce [23].

Dans l'hyperbole, la demi-corde des contacts est dans le rap-

port de a *à* b *avec la distance, du milieu de la corde au point de l'axe focal situé à la distance* b *du centre de la conique.*

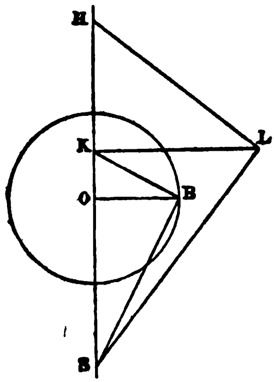


Fig. 29

Soient O (*fig.* 30) ce centre, H celui du cercle, S le saillant, KL la demi-corde des contacts; sur l'axe focal, prenons OB = b.

Puisque KL est symétrique, par rapport à O, de la polaire de S dans le cercle de centre O et de rayon b [**45**], on a $\overline{OB}^2 = OK.OS$, ce qui prouve que le triangle BKS est rectangle; le triangle HLS l'est aussi; ces deux triangles donnent

$$\overline{KL}^2 = HK.KS, \qquad \overline{BK}^2 = OK.KS,$$

d'où

$$\frac{\overline{KL}^2}{\overline{BK}^2} = \frac{HK}{OK} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \text{et} \quad \frac{KL}{BK} = \frac{a}{b}.$$

51. — On peut s'appuyer sur la propriété du § 46 pour tracer une circonférence passant par un point donné et bitangente de seconde espèce à une conique donnée, à moins que la conique ne soit une ellipse, et que la perpendiculaire abaissée du point donné sur le second axe ne la rencontre pas. Dans ce cas, on fera usage d'une autre propriété, en vue de laquelle nous allons d'abord démontrer le lemme suivant.

Lemme. — *La distance mutuelle de deux points, dont l'un se trouve sur une circonférence donnée, est moyenne proportionnelle entre lès distantes de l'autre au centre et au symétrique du conjugué de cet autre par rapport à la circonférence, l'axe de symétrie étant la perpendiculaire abaissée du premier point sur le diamètre passant par le second.*

Soient O (*fig.* 30) le centre du cercle, A, B deux points conjugués harmoniques par rapport aux extrémités d'un diamètre CD, M un point quelconque de la circonférence. Menons MP perpendiculaire à CD, et, sur CD, prenons PA′ égal à PA, PB′ égal à PB; enfin joignons M aux points O, A, A′, B, C.

On a $\widehat{AMO} = \widehat{AMC} + \widehat{CMO}$; mais $\widehat{AMC} = \widehat{BMC}$ parce que MC est bissectrice de l'angle AMB, et $\widehat{CMO} = \widehat{OCM}$ parce que le triangle OCM est isocèle ; il vient donc $\widehat{AMO} = \widehat{BMC} + \widehat{OCM} = \widehat{OBM} = \widehat{AB'M}$. Il suit de là que les triangles AMO, AB'M sont semblables et donnent

$$\overline{AM}^2 = AO.AB'.$$

On aurait de même, par les triangles BMO, BA'M,

$$\overline{BM}^2 = BO.BA';$$

BA' est du reste égal à AB'.

On peut remarquer que le rapport de $\overline{AM}^2$ à $\overline{BM}^2$ est le même que celui de AO à BO, et que l'on a aussi AM.BM = OM.AB'.

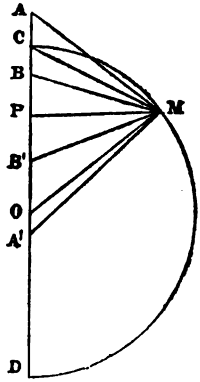


Fig. 30

Si, du centre d'une ellipse, on prend, sur la tangente en l'un des sommets du petit axe, la perspective de la demi-corde polaire d'un point du prolongement de cet axe intérieur à un cercle bitangent, et si l'on mène, dans ce cercle, la demi-corde principale du même point, enfin, si l'on construit un triangle rectangle ayant, pour côtés de l'angle droit, les deux lignes ainsi obtenues, l'hypoténuse de ce triangle sera dans le rapport de c *à* b *avec la distance du point considéré à la droite des contacts.*

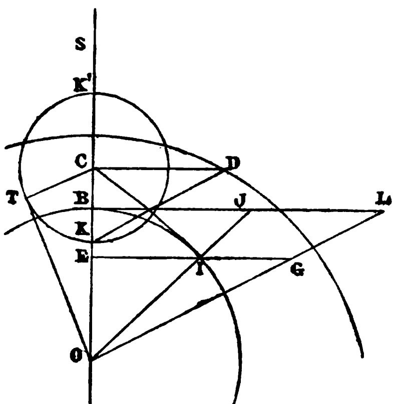


Fig 31

Soient O (*fig.* 31) le centre de l'ellipse, B l'un des sommets du petit axe, H le centre d'un cercle bitangent, S le saillant, K l'intersection de OB avec la droite des contacts, C l'un quelconque des points situés à l'intérieur du cercle sur le prolongement de OB. Menons la

demi-corde principale CD, et, dans l'ellipse, la demi-corde polaire EG de C. La polaire de C étant la même dans l'ellipse et dans le cercle décrit sur le petit axe comme diamètre [1], EG passera par le point de contact I de ce cercle avec la tangente issue de C. Elevons en B, sur le second axe, la perpendiculaire BL jusqu'à sa rencontre en L avec OG. Il s'agit de démontrer que le rapport de $\overline{BL}^2 + \overline{CD}^2$ à $\overline{CK}^2$ est celui de c^2 à b^2.

Appelons J le point où OI coupe BL. Les lignes BL, BJ sont proportionnelles aux lignes EG, EI, et celles-ci le sont à a, b [50]. Mais, à cause de l'égalité des triangles OCI, OBJ, on peut, dans la proportion, remplacer BJ par CI; si ensuite on élève au carré, il viendra

$$\frac{\overline{BL}^2}{a^2} = \frac{\overline{CI}^2}{b^2}.$$

Tirons DK, et, sur le second axe, prenons CK′ égal à CK. Puisque S et K sont conjugués par rapport au cercle bitangent, on aura, en vertu du lemme, $\overline{DK}^2 = \text{HK.SK}'$, d'où [45]

$$\frac{\overline{DK}^2}{a^2} = \frac{\text{OK.SK}'}{b^2},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\overline{BL}^2 + \overline{DK}^2}{a^2} = \frac{\overline{CI}^2 + \text{OK.SK}'}{b^2}.$$

Menons OT tangente au cercle décrit sur KK′ comme diamètre. Le triangle rectangle OIC donne

$$\overline{CI}^2 = \overline{OC}^2 - b^2,$$

ou

$$\overline{CI}^2 = \overline{OC}^2 - \text{OK.OS},$$

puisque K, S sont conjugués par rapport au cercle de centre O et de rayon b [45]. De là résulte

$$\overline{CI}^2 + \text{OK.SK}' = \overline{OC}^2 - \text{OK.OK}' = \overline{OC}^2 - \overline{OT}^2 = \overline{CK}^2,$$

et, enfin,

$$\frac{\overline{BL}^2 + \overline{DK}^2}{a^2} = \frac{\overline{CK}^2}{b^2} = \frac{\overline{BL}^2 + \overline{CD}^2}{c^2}.$$

52. — *Les droites des contacts d'une conique avec un cercle bitangent et avec un système de deux tangentes se coupent en l'un des sommets des sécantes communes au cercle et au système des deux tangentes.*

La droite qui joint les deux sommets des sécantes communes est la polaire, par rapport au cercle, du point d'intersection des deux tangentes; de plus, la droite que joint ce dernier point à l'un des sommets est la polaire de l'autre dans le cercle et dans le système des deux tangentes. Cela posé, on peut adapter, au cas actuel, le raisonnement du § **25**.

53. — Ici se placeraient deux autres propriétés dont les énoncés et les démonstrations se déduisent, par analogie, de ce qui a été dit sur les cercles bitangents de première espèce [**26**], [**27**].

54. — *Les centres de similitude de deux cercles bitangents se trouvent, avec les foyers, sur une même circonférence.*

Cela résulte de ce que les distances d'un foyer aux centres des deux cercles donnés sont proportionnelles aux rayons.

On voit que le lieu des foyers des coniques bitangentes à deux cercles donnés, de seconde espèce, est la circonférence qui a pour diamètre la ligne joignant les centres de similitude des deux cercles. (*A suivre*).

NOTE SUR L'ARITHMÉTIQUE BINAIRE

Par M. **Ed. Collignon**, Inspecteur général des Ponts-et-Chaussées, en retraite.

L'Arithmétique binaire a été imaginée, dit-on, par Leibniz; il est du moins le premier, parmi les Modernes, qui en ait reconnu les propriétés. En réalité, la numération binaire remonte beaucoup plus haut. Sans aller jusqu'à Fo-hi, le fondateur de l'Empire chinois, qui en avait fait usage pour une énigme devenue célèbre, on peut observer que la division des quantités en deux, en quatre, en huit parties égales, est le plus simple, le plus élémentaire de tous les modes de fractionnement, et qu'elle a été longtemps adoptée, qu'elle l'est encore dans certains pays, pour les subdivisions des poids et des autres unités de mesure.

La numération binaire a pour base le nombre deux, et n'em-

ploie que les chiffres 1 et 0. La suite des nombres naturels, représentés dans la numération décimale par les notations

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10..,

se trouve représentée de la manière suivante dans la numération binaire :

1 10 11 100 101 110 111 1000 1001 1010...

L'inconvénient du système binaire, outre celui de ne pas correspondre à l'usage de la numération parlée, résulte du grand nombre de chiffres nécessaires pour représenter un nombre, même quand il est médiocrement grand. Nous chercherons d'abord à nous rendre compte approximativement du nombre de chiffres 0 et 1 qui entreront dans l'expression d'un nombre donné N, supposé écrit dans le système décimal.

Ce nombre se trouve, dans la série des puissances de 2, entre deux puissances consécutives, 2^{m-1} et 2^m, lesquelles, dans le système binaire, sont représentées par l'unité suivie de $m-1$ zéros ou de m zéros. Le nombre N, supérieur à la première limite, inférieur à la seconde, aura donc dans le système binaire m chiffres, comme 2^{m-1}.

Comparons le nombre m au nombre m' de chiffres qu'a l'entier N dans le système décimal. Ce nombre m' est au plus égal au nombre de chiffres décimaux de 2^m, puisque $2^m > N$. Appelons μ ce nombre de chiffres. Pour l'évaluer, cherchons la caractéristique du logarithme tabulaire de 2^m, c'est-à-dire la partie entière du produit

$$m \times 0{,}3010300.$$

Nous avons

$$\mu = 1 + E(m \times 0{,}3010300),$$

en désignant par E l'entier contenu dans le produit entre parenthèses. Le nombre de chiffres binaire de 2^m est

$$\mu' = 1 + m.$$

Pour le nombre 2^m, le rapport $\frac{\mu}{\mu'}$ tend, lorsque m augmente, vers la limite 0,3010300, soit, en prenant pour cette limite une valeur un peu trop basse, vers $\frac{3}{10}$. Pour les grands nombres la représen-

tation binaire exigera donc environ les $\frac{10}{3}$ du nombre des chiffres de la représentation décimale. La règle peut être étendue approximativement à tous les nombres.

Prenons pour exemple le nombre 8568, qui se transforme dans l'expression binaire

10000101111000.

Nous avons 14 chiffres binaires contre 4 chiffres décimaux. Les $\frac{10}{3}$ de 4 donneraient $13\frac{1}{3}$; le résultat est approché par défaut. La règle conduira suivant les cas à un résultat trop faible ou trop fort; mais l'erreur sera toujours faible, et le résultat permettra d'apprécier l'espace réclamé par l'écriture binaire des nombres. Prenons les trois puissances successives de 2,

$$2^{14} = 16384 \qquad 2^{15} = 32768 \qquad 2^{16} = 65536.$$

Elles s'expriment toutes par cinq chiffres décimaux. Les $\frac{10}{3}$ de 5 donnent au produit $16\frac{2}{3}$. Or, ces nombres exprimés dans le système binaire demanderont le premier 15 chiffres, le second 16, le troisième 17.

NUMÉRATION BINAIRE

Les chiffres d'un nombre qu'on écrit dans le système dont la base est b, sont les restes successifs obtenus en divisant par b le nombre proposé et les quotients qui s'en déduisent. Lorsque b est égal à 2, les divisions se font intuitivement sans qu'il soit utile de poser le diviseur. Il suffira donc de placer dans une colonne verticale les dividendes successifs, dont chacun sera la moitié du précédent, et de poser en regard de chaque dividende le reste, 0 ou 1, qu'il faut en retrancher pour que la division par 2 se fasse exactement. On s'arrêtera à un diviseur moindre que la base, et qui sera le propre reste de sa division par b. Ce sera ici le nombre 1.

Prenons pour exemples les nombres 360, 15827, 33875.

On disposera les calculs de la manière suivante :

360	0	15827	1	33875	1
180	0	7913	1	16937	1
90	0	3956	0	8468	0
45	1	1978	0	4234	0
22	0	989	1	2117	1
11	1	494	0	1058	0
5	1	247	1	529	1
2	0	123	1	264	0
1	1	61	1	132	0
		30	0	66	0
		15	1	33	1
		7	1	16	0
		3	1	8	0
		1	1	4	0
				2	0
				1	1

On aura donc, en écrivant de gauche à droite les chiffres contenus dans la colonne des restes, prise en remontant,

$$(360)_{10} = (101101000)_2$$
$$(15827)_{10} = (11110111010011)_2$$
$$(33875)_{10} = (1000010001010011)_2.$$

Si les nombres binaires ont beaucoup de chiffres et tiennent beaucoup de place, les chiffres significatifs qu'ils renferment ont la moindre valeur possible, puisqu'ils sont tous égaux à 1.

L'écriture se simplifie notablement, au point de vue des chiffres significatifs, quand on admet les chiffres pris négativement. On a en effet l'identité

$$2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^2 + 2 + 1 = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Si donc on trouve dans un nombre binaire un groupe formé de n unités consécutives, on pourra toujours remplacer ce groupe par une unité de l'ordre immédiatement supérieur à l'unité la plus haute qu'il renferme, à prendre négativement l'unité de l'ordre le plus bas, et à écrire des zéros à la place de toutes les unités intermédiaires. On aura par exemple

$$111111 = 100000\bar{1},$$

en plaçant le signe — au-dessus du chiffre pour conserver les positions relatives des unités des différents ordres.

Cette notation une fois adoptée, on en déduit diverses réductions qui simplifient notablement l'écriture des nombres.

On aura, par exemple,

$$(1\bar{1})_2 = 2 - 1 = 1 = (01)_2$$
$$(\bar{1}1)_2 = -2 + 1 = -1 = (0\bar{1})_2$$
$$(\bar{1}\bar{1}11)_2 = (\bar{1}00\bar{1})_2$$
$$(\bar{1}\bar{1}\bar{1}111)_2 = (\bar{1}0100\bar{1})_2$$
$$(\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}1111)_2 = (\bar{1}0010000\bar{1})_2.$$

Si nous reprenons les exemples de transformation donnés plus haut, il viendra, en appliquant les réductions indiquées,

$$(360)_{10} = (101101000)_2 = (110\bar{1}01000)_2 = (10\bar{1}0\bar{1}01000)_2$$
$$(15827)_{10} = (11110111010011)_2 = (1000\bar{1}100\bar{1}01110\bar{1})_2$$
$$= (10000\bar{1}00\bar{1}01010\bar{1})_2$$
$$(33875)_{10} = (1000010001010011)_2 = (100001000101010\bar{1})_2.$$

Le résultat final que l'on obtiendra sera un nombre binaire où les chiffres 1, pris positivement ou négativement, seront séparés par un ou plusieurs zéros. L'emploi des unités négatives conduit ainsi à des nombres binaires dans lesquels, sur n chiffres écrits, il y a au plus $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$ chiffres significatifs, suivant que n est pair ou impair.

L'opération inverse, qui consiste à revenir d'un nombre binaire donné au nombre décimal égal, se fait aisément à l'aide d'une table des puissances de 2.

2^0	1	2^{10}	1024	2^{20}. . .	1048576
2^1	2	2^{11}	2048	2^{21}. . .	2097152
2^2	4	2^{12}	4096	2^{22}. . .	4194304
2^3	8	2^{13}	8192	2^{23}. . .	8388608
2^4	16	2^{14}	16384	2^{24}. . .	16777216
2^5	32	2^{15}	32768	2^{25}. . .	33554432
2^6	64	2^{16}	65536	2^{26}. . .	67108864
2^7	128	2^{17}	131072	2^{27}. . .	134217728
2^8	256	2^{18}	262144	2^{28}. . .	268435456
2^9	512	2^{19}	524288	2^{29}. . .	536870912
				2^{30}. . .	1073741824

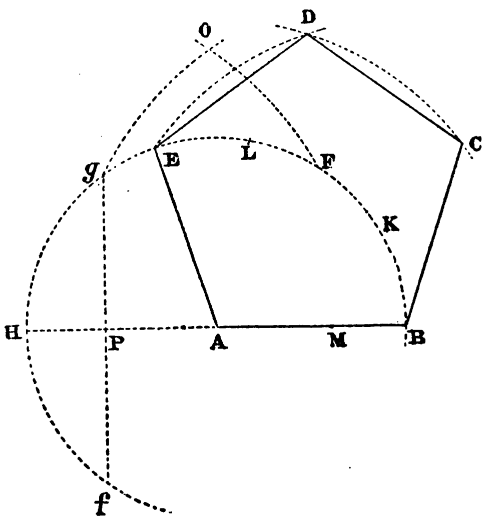
Comme 2^{30} est supérieur à un milliard, un nombre entier de 9 chiffres, écrit dans ce système décimal, pourra donc être représenté, dans le système binaire, avec 30 chiffres au plus. Il est rare qu'on ait à introduire dans les calculs des nombres aussi considérables. (*A suivre*).

NOTES GÉOMÉTRIQUES
SUR LE PENTAGONE ET LE DÉCAGONE RÉGULIERS

Par **A. Droz-Farny**.

Dans un premier article sur le pentagone régulier (*Journal de Mathématiques Élémentaires*, année 1895, page 193), j'ai montré comment on pouvait construire géométriquement, avec la règle et le compas, sur une droite donnée AB, comme côté, un pentagone régulier.

Soit ABCDE le polygone demandé. On sait que les diagonales DA et DB divisent l'angle EDC en trois parties égales de 36° chacune. Donc AB est aussi le côté du décagone régulier dans la circonférence décrite, de D comme centre, avec DA comme rayon. On a donc ainsi un procédé de construction du décagone régulier sur une ligne droite donnée comme côté.



La remarque précédente va nous fournir une seconde solution du problème.

Décrivons de A, comme centre, avec AB comme rayon, une circonférence et portons sur cette dernière les cordes BK = KL = LE = AM; AM étant le grand segment du côté AB divisé en moyenne et extrême raison.

D'après un théorème bien connu, AM sera le côté du décagone inscrit dans cette circonférence et, par conséquent, Arc BE $= 3.36°$ $= 108°$; E est donc un sommet du pentagone cherché.

En se basant sur la construction de la division en moyenne et extrême raison donnée par Mascheroni dans sa Géométrie du compas, il est facile d'obtenir le pentagone régulier en n'utilisant que le compas.

De A comme centre avec AB comme rayon décrivons une circonférence; sur cette dernière portons à partir de B les cordes égales $BF = Fg = gH = HI = AB$.

De B et H comme centres avec Bg comme rayon décrivons les arcs gO et FO qui se coupent en O et enfin de g et J comme centres avec AO comme rayon traçons deux arcs de cercle qui se croisent en M sur AB. Il suffira de porter sur la circonférence les cordes $BK = KL = LE = AM$. E sera un sommet du pentagone.

Il est facile de démontrer la construction de Mascheroni. Posons $AB = a$; on a $Bg = HF = a\sqrt{3}$, donc dans le triangle rectangle OAB : $\overline{OA}^2 = (a\sqrt{3})^2 - a^2 = 2a^2$, $OA = a\sqrt{2}$. La corde auxiliaire gI coupe le rayon AH en P, on a :

$$\overline{PM}^2 = (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} \qquad PM = \frac{a}{2}\sqrt{5},$$

et, par conséquent

$$AM = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

relation qui prouve l'exactitude de la construction.

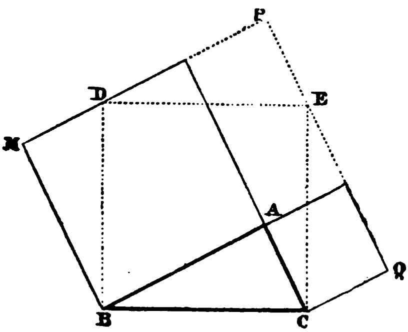
Remarque. — AO est le côté du carré inscrit dans la circonférence.

UNE DÉMONSTRATION
DU THÉORÈME DE PYTHAGORE

Par M. **Wolkow**, professeur à l'École reale de Saint-Pétersbourg.

Prenons la figure classique et aux points B, C, élevons, à BC, des perpendiculaires BD, CE dans la direction opposée à celle que l'on considère habituellement. Nous observerons d'abord que

la figure BCDE est un carré. En effet, le triangle MBD a ses côtés perpendiculaires à ceux de ABC et, comme BM = BA, ces triangles sont égaux ; on a donc BD = BC. On voit, de même, que CE = BC.



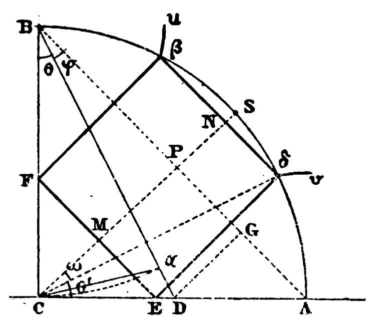
Cela posé ; si, de la figure BMPQCB on retranche les trois triangles égaux BMD, DPE, CQE, il reste le carré construit sur BC.

Si, de cette même figure, on retranche ABC et le rectangle AP, il reste les deux carrés construits sur AB et sur AC. Or, le rectangle AP et le triangle ABC représentent trois triangles égaux à BLD ; donc, etc...

UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE PRATIQUE

(**2e solution** ; voir page 86).

Inscrire dans un quadrant de cercle un carré dont l'un des côtés soit parallèle à la corde de ce quadrant.



On a ME = MC, par suite Nδ est le tiers de NC.

Il suffit donc de partager le segment PA en trois parties égales et de mener la droite, issue de C, qui passe par le point de division le plus rapproché de P : cette droite coupe le cercle donné au point δ, etc...

(M).

SUR L'ÉQUATION $a \sin x + b \cos x = c$,

Par M. F. J. Vaes (*)

1. — Prenons (*fig.* 1) (**) $OA = a$, $AB = b$, alors $\frac{b}{a}$ est la tangente de AOB; cet angle est donc l'angle auxiliaire.

Décrivons de O comme centre un cercle de rayon R, prenons $OC = R\frac{c}{a}$, et menons par le point C, DD′ parallèle à OB. Alors, les angles DOA et D′OA satisfont à l'équation donnée.

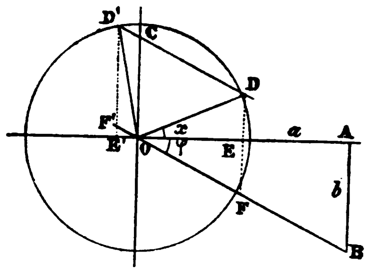


Fig. 1

En effet, si l'on mène DF parallèle à CO, on a :

$$DE = R \sin DOE,$$

et

$$EF = \frac{AB}{OA} \cdot OE,$$

ou

$$EF = \frac{b}{a} \cdot R \cos DOE.$$

Mais $DF = DE + EF = CO$; donc $R \sin DOE + \frac{b}{a} R \cos DOE = R\frac{c}{a}$,

on a

$$\sin DOE + b \cos DOE = c.$$

De même : si D′F′ est parallèle à CO, on a $D'E' = R \sin D'OE$, et

$$E'F' = \frac{AB}{OA} \cdot OE' = \frac{b}{a}(- R \cos D'OE).$$

(*) Extrait d'une brochure publiée à Gorinchem (Hollande), en 1896, intitulée *Etude Goniométrique*.

(**) Par un défaut graphique de la (*fig.* 1), le point D n'est pas représenté, avec une exactitude suffisante, comme appartenant au cercle.

Or,

$$D'F' = D'E' - E'F' = CO;$$

finalement :

$$R \sin D'OE + \frac{b}{a} R \cos D'OE = \frac{c}{a}$$

ou

$$a \sin D'OE + b \cos D'OE = c.$$

2. — *Comparaison des constructions connues* (*).

Traçons (*fig.* 2) la tangente en A' ; elle coupe DD' en D_1 ; puis menons D_1E parallèle à DO, et D_1F parallèle à D'O, ce qui revient à déplacer le secteur OD'D de façon que O vienne en D_1, et DD' le long de OB, alors on a la solution de M. Droz-Farny. Dans la construction de M. Lauvernay, il suffit de tracer le cercle BD en son entier pour voir qu'elle est tout-à-fait égale à celle de M. Lemoine. La première se termine par le tracé du cercle BD ; l'autre débute par ce tracé. L'autre cercle employé dans ces deux constructions est le cercle circonscrit au triangle OD'D ; la droite D'D cherchée est la cordé commune des deux cercles.

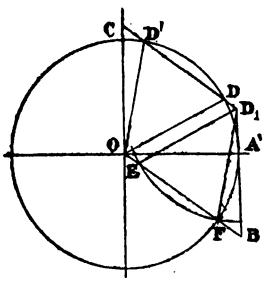


Fig. 2

Les équations des deux cercles sont :

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = c^2,$$

$$(2) \qquad \left(x - \frac{1}{2} b\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} a\right)^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2),$$

l'équation de l'axe radical est donc :

$$(3) \qquad bx + ay = c^2.$$

Les équations (1) et (3) conduisent à la solution de M. de Longchamps (*loc. cit.*).

(*) Voyez *Journal*, 1896, pp. 5, 59, 84.

RELATIONS MÉTRIQUES
ET TRIGONOMÉTRIQUES
ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES
DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **Lecocq**, ancien professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, 1897 ; p. 78).

20 (*). — *Des bissectrices limitées* SG_1, SG', QG_1 QG' *et des droites qui joignent les milieux des côtés opposés.*

$$SG_1 = \delta - \beta = \frac{2bhl(a-c)\sqrt{(p-b)(p-d)}}{(a^2-c^2)(d^2-b^2)},$$

$$SG' = \delta + \beta = \frac{2dhl(a-c)\sqrt{(p-b)(p-d)}}{(a^2-c^2)(d^2-b^2)},$$

$$QE_1 = \gamma - \alpha = \frac{2chl(d-b)\sqrt{(p-a)(p-c)}}{(a^2-c^2)(d^2-b^2)},$$

$$QE' = \gamma - \alpha = \frac{2ahl(d-b)\sqrt{(p-a)(p-c)}}{(a^2-c^2)(d^2-b^2)}.$$

Droite joignant les milieux de AB et CD

$$\text{coefficient angulaire } \frac{m-n}{m+n} \operatorname{cotg} \frac{I}{2},$$

(*) Le point L, dont il a été question dans les paragraphes précédents, et dont l'importance est manifeste, occupe comme on l'a vu, sur HK, une position déterminée par le rapport des diagonales ; il se trouve encore situé sur quatre droites définies passant par les sommets du quadrilatère. En effet, des formules antérieurement établies (§ **16**), on tire :

$$r' = \frac{\alpha\delta}{\sqrt{\alpha^2+\delta^2}} = \frac{S}{a+c},$$

$$r'' = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}} = \frac{S}{d+b}.$$

Par conséquent :

Si l'on prolonge les deux côtés d'un angle du quadrilatère, A *par exemple, d'une longueur égale au côté opposé, la diagonale, issue de* A, *du parallélogramme construit sur les lignes* a + c *et* d + b, *ainsi formées, passe par le point* L ; *l'aire du quadritatère* ABCD *est double de celle des triangles ayant ces lignes pour bases, et le point* L *pour sommet opposé.*

n° 21 direction symétrique de QI, ou $\frac{\beta^2}{\delta\gamma}$,

longueur $\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos I}$.

Droite joignant les milieux de AD et BC

coefficient angulaire $\frac{m+n}{m-n} \cot g \frac{I}{2}$,

direction symétrique de SI, ou $\frac{\delta\gamma}{\alpha^2}$,

longueur $\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \cos I}$.

Il serait facile de vérifier avec les coordonnées des milieux des quatre cotés que les deux droites précédentes passent par le milieu de HK, et que SH, SK et QH, QK sont symétriques par rapport à SL et QL, ce qui est du à l'antiparallélisme des côtés opposés du quadrilatère.

On trouvera aussi la relation :

$$\frac{MH}{MK} = \frac{m^2}{n^2}.$$

21. — *Éléments du triangle* SOQ.

Le point I est le point de rencontre des hauteurs, de sorte que les angles SIQ et O sont supplémentaires.

Soit I_1 le pied de la hauteur QII_1,

I_2 le pied de la hauteur SII_2.

Coefficients angulaires des droites

QO $$\frac{(a-c)(d-b)}{(a+c)(d+b)}\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{(p-b)(p-d)}} = \frac{\alpha^2}{\delta\gamma},$$

SO $$\frac{(a+c)(d+b)}{(a-c)(d-b)}\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{(p-b)(p-d)}} = \frac{\delta\gamma}{\beta^2},$$

SI $$-\frac{(a+c)(d+b)}{(a-c)(d-b)}\sqrt{\frac{(p-b)(p-d)}{(p-a)(p-c)}} = -\frac{\delta\gamma}{\alpha^2},$$

QI $$-\frac{(a-c)(d-b)}{(a+c)(d+b)}\sqrt{\frac{(p-b)(p-d)}{(p-a)(p-c)}} = -\frac{\beta^2}{\delta\gamma},$$

distances OQ, OS, IQ, IS

$$OQ=\frac{hl}{4\delta\gamma}\cdot\frac{d+b}{a-c}\sqrt{\frac{\delta^2\gamma^2+\alpha^4}{(p-a)(p-c)}}=\frac{\delta(\gamma^2+\beta^2)\sqrt{\delta^2\gamma^2+\alpha^4}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2},$$

$$OS=\frac{hl}{4\delta\gamma}\cdot\frac{a+c}{d-b}\sqrt{\frac{\delta^2\gamma^2+\beta^4}{(p-b)(p-d)}}=\frac{\gamma(\delta^2+\alpha^2)\sqrt{\delta^2\gamma^2+\beta^4}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2},$$

$$IQ=\frac{ac(d+b)\sqrt{(p-a)(p-c)}}{hl(a-c)}\times\frac{\sqrt{\delta^2\gamma^2+\beta^4}}{\delta\gamma}=\frac{\delta(\gamma^2-\alpha^2)\sqrt{\delta^2\gamma^2+\beta^4}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2},$$

$$IS=\frac{bd(a+c)\sqrt{(p-b)(p-d)}}{hl(d-b)}\times\frac{\sqrt{\delta^2\gamma^2+\alpha^4}}{\delta\gamma}=\frac{\gamma(\delta^2-\beta^2)\sqrt{\delta^2\gamma^2+\alpha^4}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2},$$

hauteurs QI_1 et SI_2

$$QI_1=\frac{h^3l^3(d-b)\sqrt{(p-b)(p-d)}}{S(a^2-c^2)(d^2-b^2)(a+c)}\times\frac{\delta\gamma}{\sqrt{\delta^2\gamma^2+\beta^4}},$$

$$SI_2=\frac{h^3l^3(a-c)\sqrt{(p-a)(p-c)}}{S(a^2-c^2)(d^2-b^2)(d+b)}\times\frac{\delta\gamma}{\sqrt{\delta^2\gamma^2+\alpha^4}},$$

lignes trigonométriques de l'angle $\widehat{SOQ}=\widehat{O}$,

$$\operatorname{tg}\widehat{O}=\frac{4Sh^2l^2}{k^2(a^2-c^2)(d^2-b^2)},\quad \cos\widehat{O}=\frac{\delta\gamma(\alpha^2+\beta^2)}{\sqrt{(\delta^2\gamma^2+\alpha^4)(\delta^2\gamma^2+{}^4\beta)}},$$

$$\sin\widehat{O}=\frac{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2}{\sqrt{(\delta^2\gamma^2+\alpha^4)(\delta^2\gamma^2+\beta^4)}}.$$

22. — *Distances au centre et longueurs de C_1 et C_2 cordes du cercle O interceptées sur QI_1 et SI_2.*

$$OI_1=\frac{\delta^2\gamma(\alpha^2+\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)}{(\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2)\sqrt{\delta^2\gamma^2+\beta^4}},\quad \overline{OI}^2=\frac{\gamma^2\delta(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\delta^2)}{(\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2)\sqrt{\delta^2\gamma^2+\alpha^4}},$$

$$C_1=\frac{2\gamma\delta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\sqrt{\delta^2-\beta^2}}{\sqrt{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2}\sqrt{\beta^4+\delta^2\gamma^2}},\quad C_2=\frac{2\delta\gamma\sqrt{\beta^2+\alpha^2}\sqrt{\alpha^2+\delta^2}\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}{\sqrt{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2}\sqrt{\alpha^4+\delta^2\gamma^2}},$$

Remarque. — La circonférence décrite sur SQ comme diamètre passe par les points S, Q, L, ω, I_1, I_2 et les pieds des hauteurs abaissées des sommets S et Q dans les triangles (b, S), (d, S); (a, Q) et (c, Q). Le rapport des distances de chacun de ces dix points aux milieux H et K des diagonales et égal au rapport $\frac{m}{n}$.

(*A suivre*).

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir 1897, page 87)

GÉOM. INDIV. — LIB. III

I. — *Soit le segment circulaire ou elliptique* DEM (*fig.* 27); *la somme des carrés des droites* CN *est à celle des carrés des droites* CM *comme* EB + 3.BR *à* 6.BR, *ou bien* OB + ER *à* 6.BR. En effet, d'après la proposition précédemment démontrée

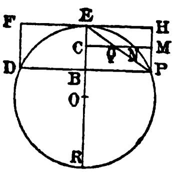


Fig. 27

$$\frac{\Sigma(\overline{CN}^2)}{\Sigma(\overline{CM}^2)} = \frac{\Sigma(RC.CE)}{\Sigma(RB\ BE)} = \frac{\frac{EB}{6} + \frac{BR}{2}}{BR}.$$

Corollaire I. — Il suit de là que le segment sphérique (ou elliptique) est au cylindre de même base et de même hauteur dans le rapport qui vient d'être indiqué. Par exemple, si le plan sécant passe par le centre O, ce rapport devient $\frac{ER}{6.OR} = \frac{2}{3}$: la demi sphère (ou le demi sphéroïde) est donc égale aux deux tiers du cylindre circonscrit.

Ce théorème n'est pas applicable à la sphère entière : le suivant n'a pas la même limitation.

Corollaire II. — On remarquera que, en menant les cordes DE, EP, on a

$$\frac{\Sigma(\overline{CQ}^2)}{\Sigma(\overline{CM}^2)} = \frac{1}{3},$$

ainsi, la demi sphère (ou le demi sphéroïde) est moyenne arithmétique entre le cône inscrit et le cylindre circonscrit.

II. — *Au segment de cercle ou d'ellipse* BM (*fig.* 28), *circonscrivons un rectangle* DN, *on a*

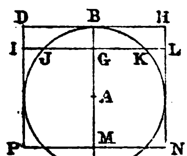


Fig. 28

$$\frac{\Sigma(\overline{IL}^2)}{\Sigma(\overline{JK}^2)} = \frac{3.BA.AO}{BM(MO + OA)}.$$

Démonstration analogue à la précédente.

De là un nouveau moyen de comparer la sphère (ou le sphéroïde) au cylindre circonscrit.

V. — *Soit* DBF *un demi cercle* (*ou une demi ellipse*) (*fig.* 29). *Circonscrivons-lui le rectangle* AF *et tirons les droites* AE, CE : *pour toute transversale* XG, *on a*

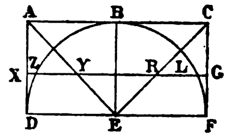


Fig. 29

$$\overline{XG}^2 = \overline{ZL}^2 + \overline{YR}^2.$$

La démonstration est facile.

Corollaire. — Il s'ensuit que la tranche de sphère (ou de sphéroïde) égale la différence des tranches correspondantes du cylindre et du cône. De là une nouvelle cubature partielle ou totale extrêmement simple de ces deux corps (*).

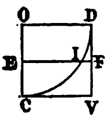


Fig. 30

XIII. — *Circonscrivons un rectangle* OV (*fig.* 30) *au quadrant de cercle* (*ou d'ellipse*) OCD, *il s'agit de déterminer le rapport de* $\Sigma(\text{IF}^2)$ *à* $\Sigma(\text{EF}^2)$. *On a*

$$\overline{IF}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{EI}^2 - 2.\text{EF}.\text{IF},$$

donc

$$\frac{\Sigma(\overline{IF}^2)}{\Sigma(\overline{EF}^2)} = 1 + \frac{\Sigma(\overline{EI}^2)}{\Sigma(\overline{EF}^2)} - 2\,\frac{\Sigma.\text{EI}}{\Sigma.\text{EF}} = 1 + \frac{2}{3} - 2\,\frac{\text{surf. ODIC}}{\text{rect. OV}}.$$

Corollaire. — Le rapport qu'on vient de trouver est celui des solides produits par la révolution du quadrant et du rectangle autour de DV. Le premier de ces solides s'appelle *apex*.

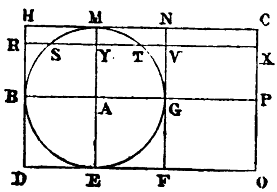


Fig. 31

XIV, XVI, XVII. — *Considérons la figure formée d'un cercle* (*ou d'une*

(*) On tire de là le théorème général suivant :

(I) ***Si trois solides de même hauteur sont tels que les sections du premier et du second soient ensemble égales à celle du troisième, le volume de ce dernier est égal à la somme des deux autres.*** Ce théorème, conséquence du théorème d'Archimède, s'applique à un nombre quelconque de solides. On l'étend immédiatement aux surfaces.

La méthode de cubature résultant de cette remarque a été retrouvée récemment (voir le *Traité de Géom.* de F. I. C.), ainsi que plusieurs de celles qu'il nous reste à exposer.

ellipse) ME (*fig.* 31) *et du rectangle circonscrit* HF *prolongé en* NO. *Il faut trouver les rapports*

$$\frac{\Sigma(\overline{TX}^2)}{\Sigma(\overline{YX}^2)}, \quad \frac{\Sigma(\overline{SX}^2)}{\Sigma(\overline{YX}^2)}, \quad \frac{\Sigma(\overline{SX}^2 - \overline{TX}^2)}{\Sigma(\overline{ST}^2)}.$$

Comme $TX^2 = XY^2 + YT^2 - 2.XY.YT$, le premier rapport est égal à

$$1 + \frac{\overline{AG}^2}{\overline{AD}^2}\frac{\Sigma(\overline{YT}^2)}{\Sigma(\overline{YV}^2)} - 2\frac{\Sigma.YT}{\Sigma.YX} = 1 + \frac{2}{3}\left(\frac{AG}{AP}\right)^2 - 2\frac{\text{surf. MGE}}{\text{rect. MO}}.$$

On a ainsi la mesure du *tympanum*, produit par la révolution de la figure CMGEO autour de CO.

Le second cas se traite de même et donne la mesure de la *basis columnaris*, produite par la révolution de la figure CMBEO autour de CO.

Le troisième rapport peut s'écrire

$$2.AP\frac{\Sigma.ST}{\Sigma(\overline{ST}^2)} = 2\frac{AP}{BG}\frac{\Sigma.ST}{\Sigma.RV}\frac{\Sigma(\overline{RV}^2)}{\Sigma(\overline{ST}^2)}$$

$$= 2\frac{AP}{BG}\frac{\text{cercle ou ell.}}{\text{rect. HF}}\frac{3}{2} = 3\frac{AP}{BG}\frac{\text{cercle ou ell.}}{\text{rect. HF}}.$$

Ce rapport est aussi celui du volume de l'*annulus* produit par la rotation du cercle (ou ellipse) ME autour de CO à la sphère (ou sphéroïde), produite par le même cercle (ou ellipse), tournant autour de ME.

Quand cette dernière figure, au lieu de tourner autour de CO, tourne autour de NF, on a l'*annulus strictus*.

Cavalieri donne ensuite, par les mêmes moyens, la mesure du solide produit par un segment circulaire (ou elliptique), d'abord autour de sa corde : 1° dans le cas où le segment est plus grand qu'un demi-cercle (ou ellipse), solide appelé *malum roseum* (ou *cotoneum*); 2° dans le cas où il est plus petit, ce qui donne un solide appelé *malum citrium* (ou *olivä*); ensuite, autour d'une parallèle à sa corde; puis, par une ellipse tournant autour d'une parallèle quelconque, ou d'une parallèle à cette tangente. Il termine en indiquant plusieurs autres sujets de recherches : solides produits par une ellipse tournant autour d'un diamètre (*pirum*), ou autour d'une parallèle à ce diamètre (*malum paradisum* ou *ficus*, suivant les cas).

GÉOM. INDIV. — LIB. IV, V ET VI

Nous citerons du quatrième livre :

I. — *Le segment de parabole est égal aux deux tiers du parallélogramme circonscrit.* En effet, on a (*fig.* 32)

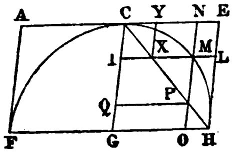


Fig. 32

$$\frac{NM}{NO} = \frac{\overline{QB}^2}{\overline{GH}^2} = \frac{\overline{NP}^2}{\overline{EH}^2},$$

donc
$$\frac{\Sigma.NM}{\Sigma.NO} = \frac{\Sigma(\overline{NP}^2)}{\Sigma(\overline{EH}^2)} = \frac{1}{3}.$$

XXI. — *Le conoïde parabolique est égal à la moitié du cylindre circonscrit.* En effet

$$\frac{\overline{IM}^2}{\overline{IL}^2} = \frac{XY}{EH} = \frac{IX}{GH},$$

donc

$$\frac{\Sigma(\overline{IM}^2)}{\Sigma(\overline{IL}^2)} = \frac{\Sigma.IX}{\Sigma.GH} = \frac{1}{2}.$$

Nous avons présenté les deux démonstrations avec la simplicité qu'elles comportent : elles sont obtenues chez lui par des détours pénibles et embarrassés. Le reste du livre IV concerne les solides produits par la révolution d'un segment parabolique autour d'un diamètre, comme ST (*fig.* 33), c'est-à-dire la recherche des valeurs des rapports suivants, ST étant en dehors du segment, ou en dedans, ou le coupant en U :

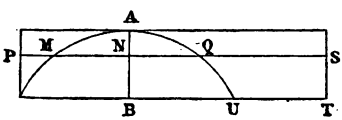


Fig. 33

$$\frac{\Sigma(\overline{MS}^2)}{\Sigma(\overline{PS}^2)}, \quad \frac{\Sigma(\overline{QS}^2)}{\Sigma(\overline{NS}^2)}, \quad \frac{\Sigma(\overline{MS}^2 - \overline{MQ}^2)}{\Sigma(\overline{NS}^2)}.$$

Ces solides sont l'*apex parabolicus*, l'*acervus*, le *semiannulus*, etc.

Dans le cinquième livre, il donne d'abord des théorèmes analogues à ceux du précédent, mais concernant l'hyperbole, et dont on restituera sans peine les énoncés et les démonstrations. Nous ne retiendrons que le suivant, à cause de sa simplicité.

XXV. — *Mesure du tympanum hyperbolicum produit par un segment d'hyperbole* MAN, *tournant autour de l'axe non transverse.* On a (*fig.* 34)

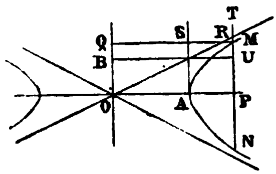


Fig. 34

$$\overline{MQ}^2 = \overline{RQ}^2 + \overline{SQ}^2.$$

Le volume est donc égal à la somme d'un cylindre et d'un cône aisément déterminables (*).

Dans le sixième livre, Cavalieri ramène ainsi la quadrature de la spirale d'Archimède à celle de la parabole.

Soit la parabole OMA (*fig.* 36), telle que la tangente OB soit égale au rayon, et l'ordonnée AB à la circonférence génératrice de la spirale. A l'ordonnée MP, correspond un secteur élémentaire de la spirale, qui aura un rayon égal à OP. On a donc

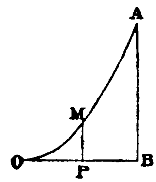


Fig. 36

$$\frac{\text{surf. spirale}}{\text{surf. parab.}} = \frac{\Sigma(\text{sect. OP})}{\Sigma(\text{ord. MP})} = \frac{\Sigma(\overline{OP}^2)}{\Sigma.\text{MP}} = 1,$$

(*) Il est surprenant que cette extension du théorème V du livre III n'ait pas été suivie de celle relative au conoïde hyperbolique d'Archimède (à deux nappes). On a en effet

$$\overline{MP}^2 = \overline{PT}^2 + \overline{UP}^2,$$

ce qui montre que ce conoïde est de même égal à un cône et un cylindre.

Cavalieri trouve péniblement les sommes des carrés des ordonnées de l'hyperbole par sa méthode habituelle.

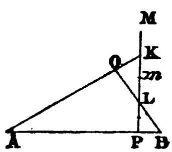


Fig. 35

En général, soient deux droites OA, OB (*fig.* 35) coupées en K et L par une perpendiculaire à AB. Si on prend

$$\overline{PM}^2 = \overline{PK}^2 + \overline{PL}^2 \quad \text{et} \quad \overline{Pm}^2 = \overline{PL}^2 - \overline{PK}^2,$$

les lieux de M et de *m* sont deux coniques telles que, tournant autour de AB, les cercles décrits par PM et P*m* seront respectivement la somme et la différence de ceux décrits par PL et PK. Le volume est donc la somme ou la différence de deux cônes.

Dans le cas où les deux droites OA, OB sont également inclinées sur AB, le lieu de *m* est un conoïde parabolique. De là un nouveau moyen de le mesurer.

puisque $MP = \overline{OP}^2$. La surface retranchée dans le cercle est donc égale au segment parabolique OAB (*).

(*A suivre*).

BACCALAURÉAT CLASSIQUE ET MODERNE

(*LETTRES-MATHÉMATIQUES*; 3 Avril 1897).

Académie de Paris

1° *Problème obligatoire :* On considère la somme S_1 des n premiers nombres entiers, et la somme S_2 de leurs carrés. On demande comment varie le rapport de S_2 au carré de S_1, quand n croît, par valeurs entières, à partir de l'unité.

2° *Questions à choisir :* (*a*) Connaissant sin a calculer sin $\frac{a}{2}$ et cos $\frac{a}{2}$.

(*b*) Résoudre un triangle connaissant ses trois côtés.

(*c*) Résolution trigonométrique de l'équation du second degré.

ENSEIGNEMENT MODERNE

(*LETTRES-SCIENCES*)

Problème : Une droite F'F de longueur $2c$ étant donnée, on décrit une circonférence sur cette droite comme diamètre et on considère les deux points F' et F comme les foyers d'une ellipse qui coupe la circonférence précédente On propose :

1° D'établir l'équation qui permet de calculer ou de construire le demi-grand axe a de cette ellipse, en supposant que le rectangle ABCD, inscrit à la fois dans le cercle et dans l'ellipse, ait une surface donnée K^2.

(*) G. de Saint-Vincent et Cavalieri ont étudié les nombreuses analogies de la spirale d'Archimède et de la parabole, en représentant la première comme une parabole enroulée autour de son sommet O suivant cette loi : si M est un point quelconque de la spirale, on décrira du centre O l'arc circulaire MP coupant l'axe polaire en P, et on prendra perpendiculairement à ce même axe la longueur $P\mu$ = arc MP : le lieu de μ est une parabole.

Il était aisé de tirer de là la correspondance des constructions de la tangente aux deux courbes, l'égalité du secteur compris entre les rayons vecteurs de deux points de la spirale, et de la surface comprise entre les ordonnées des points correspondants dans la parabole.

Il y avait même lieu de croire que les arcs correspondants sont de même égaux. Cette propriété, énoncée d'abord par Roberval, vers 1644, a été démontrée par Pascal en 1658 par la méthode des Anciens. Wallis en a donné une démonstration plus simple, qui revient à celle que nous avons fait connaître, J. S. 1893, p. 145.

2° De faire connaître les conditions de possibilité du problème et, pour la limite supérieure de K^2 ainsi trouvée, d'exprimer la valeur de a.

3° De calculer le rapport de la valeur limite K^2, à l'aire de l'ellipse correspondante.

Questions à choisir : (*a*) Définition complète des six lignes trigonométriques; former le tableau de leurs variations quand l'arc croît de o à 2π. Courbes représentatives.

(*b*) Énoncer et démontrer le théorème des projections.

(*c*) Établir les formules des lignes trigonométriques relatives à l'addition des arcs.

EXERCICES

22. — *Trois cercles égaux passent par un point* O. *Démontrer que le segment de droite qui réunit les points d'intersection de deux de ces cercles, supposés fixes, avec le troisième, est de grandeur constante et a toujours la même direction, quelle que soit la position de ce dernier cercle autour de* O. (M).

23. — *On donne un cercle et deux cordes quelconques.*

Par les extrémités de chacune d'elles, on leur élève respectivement des perpendiculaires : démontrer que le point de rencontre des diagonales du parallélogramme, ainsi obtenu, est au centre du cercle donné. (M).

24. — *On donne un triangle* abc *et la parallèle menée de* b *à* ac. *Du milieu* m *de* ac, *on mène une droite arbitraire qui coupe cette droite en* l *et* bc *au point* p. *Démontrer que la droite, qui joint le point* l *au milieu de* ab, *partage en deux parties égales le segment* bp? (M).

25. — *Par le point* c, *commun à deux cercles de centres* o *et* o', *on fait passer une droite, qui coupe en* a *le cercle de centre* o *et en* b' *l'autre cercle. On prend le point* m *où se coupent les droites* ao, bo' : *on demande le lieu de ce point, lorsque* ab *tourne autour de* c. (M).

26. — *Dans une circonférence de cercle, on mène les cordes* ab, bc, cd, *puis* de *parallèle à* ab *et* ef *parallèle à* bc. *Démontrer que* fa *est parallèle à* cd. (M).

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

SUR
LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite*, 1897, page 97)

CERCLES BITANGENTS A CONTACTS IMAGINAIRES

55. — Tout point du second axe de l'hyperbole est le centre d'un cercle bitangent. Il n'en est pas de même dans l'ellipse ; les valeurs

$$h' = \frac{c^2}{b}, K' = s' = b, \delta' = r' = \frac{a^2}{b}$$

correspondent au cercle osculateur de cette courbe en l'un des sommets du petit axe, mais, si, partant d'un point plus éloigné du centre de la conique que le centre de ce cercle, on effectue les constructions résultant des §§ **44** et **45**, on trouvera un saillant qui serait intérieur à l'ellipse, et une droite des contacts qui lui serait extérieure. Le point considéré ne sera donc le centre d'aucun cercle bitangent.

De ce point, abaissons, sur une tangente à la courbe, une perpendiculaire, dont nous prendrons les intersections avec les deux droites lieux des nœuds, par rapport à la tangente, des cercles bitangents à contacts réels ; ensuite, du même point comme centre, décrivons un cercle ayant pour nœuds, par rapport à la même tangente, les intersections ainsi obtenues ; ce sera l'un des cercles qui seronts dits *bitangents à contacts imaginaires*. Nous appellerons *droite des contacts* la parallèle à l'axe focal menée par le point de rencontre de la perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur la tangente avec la droite qui joint le point de contact de cette tangente au centre de l'ellipse.

56. — En réalité, le cercle et la droite sont indépendants de la tangente à l'aide de laquelle ils ont été provisoirement définis.

Démontrons d'abord que le rayon du cercle, comme celui d'un cercle à contacts réels, est, avec la distance de son centre au foyer, dans le rapport de a à c.

Soient O (*fig.* 32) le centre de l'ellipse, F l'un des foyers, MT la

tangente en un point quelconque M de la courbe, H le centre d'un cercle bitangent à contacts imaginaires, HD la perpendiculaire abaissée de H sur MP, ω l'intersection de HD avec l'un des lieux de nœuds de MT par rapport aux cercles à contacts réels. Si, sur MT, nous prenons DC égal à Dω, C sera, d'après la définition, un point de la circonférence du cercle bitangent à contacts imaginaires, et ce cercle aura pour rayon CH. Il faut prouver que le rapport de CH à FH est celui de a à c.

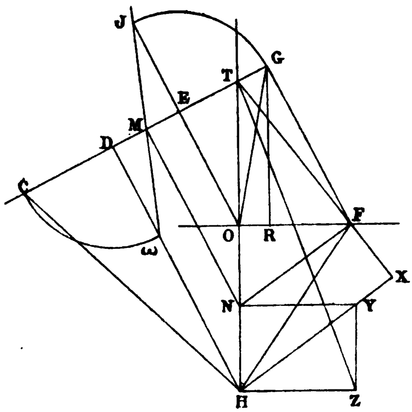


Fig. 3.

Menons OE et FG perpendiculaires à MT ; G appartiendra à la circonférence du cercle principal, et si, sur OE, nous prenons EJ égal à la demi-corde EG, J sera l'un des nœuds de ce cercle par rapport à MT, de sorte que les trois points J, M, ω se trouveront en ligne droite [42]. Menons aussi la normale MN jusqu'à sa rencontre avec l'axe HT. A cause de la similitude des triangles DMω, EJM, les lignes Dω, EJ sont proportionnelles aux lignes DM, EM ; celles-ci le sont à HN, ON, parce que DH, MN, OE sont parallèles ; on a donc Dω. ON = EJ. HN.

Le quadrilatère OFGT étant inscriptible, les angles OGE, OFT sont égaux, et les triangles rectangles de mêmes noms donnent EG. FT = OF. OG.

Enfin, soient Y le point d'intersection de HX, perpendiculaire à FT, avec NY, parallèle à OF, et Z le quatrième sommet du rectangle HNYZ. Les triangles HNY, OFT étant semblables, on aura HN. OT = OF. NY.

Si l'on multiplie membre à membre les trois égalités précédentes, en observant que Dω est égal à CD, EJ à EG, NY à HZ, et $\overline{OF}^2$ à ON. OT, il viendra CD. FT = OG. HZ.

Menons GR perpendiculaire à OF. Le quadrilatère OFGT étant inscriptible, ainsi qu'il a déjà été dit, $\widehat{TFG}$ est égal à $\widehat{TOG}$, par

conséquent à $\widehat{OGR}$, et les triangles FGT, OGR sont semblables. Les triangles FGR, DHT le sont aussi. De cette remarque et de la relation du précédent alinéa, résulte

$$\frac{CD}{HZ} = \frac{OG}{FT} = \frac{GR}{FG} = \frac{DH}{HT}.$$

L'égalité du premier rapport au dernier montre que les deux triangles rectangles CDH, HTZ ont l'angle droit compris entre côtés proportionnels; donc le rapport de leurs hypoténuses est égal à chacun des rapports extrêmes, et aussi au second, de sorte que l'on a

$$CH.FT = OG.TZ.$$

De ce que les lignes NF, HX sont parallèles [**44**], puis, de ce que les triangles HTX, HNY sont semblables, on conclut que les produits HT. FX, HX. NY ou HX. HZ sont tous deux égaux à HN. TX, par conséquent égaux entre eux. Il en résulte que HX, FX sont proportionnels à HT, HZ, et que les triangles rectangles HTZ, FHX sont semblables, ce qui donne

$$HX.\ TZ = FH.\ HT.$$

Enfin, on a, par les triangles HTX, OFT,

$$OF.\ HT = HX.\ FT.$$

Pour obtenir la relation que l'on voulait démontrer, il n'y a plus qu'à multiplier membre à membre les trois égalités de produit mises à la ligne dans le présent paragraphe, en y remplaçant OF par c, et OG par a.

57. — Nous allons maintenant faire voir que la droite des contacts, telle qu'elle a été définie au § **55**, peut s'obtenir par les mêmes constructions que dans le cas des contacts réels.

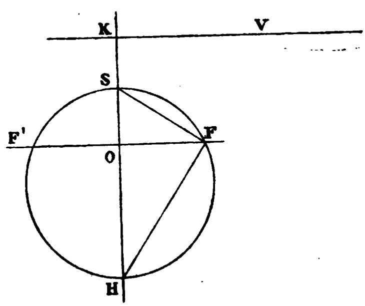


Fig. 33

Soient KV (*fig.* 33) cette droite, O, F, F' le centre et les foyers de l'ellipse, H le centre du cercle, S le second point d'intersection de l'axe OH avec la

circonférence FHF'. On aura OH.OS $= c^2$. D'ailleurs, par un raisonnement analogue à celui qui a été fait sur les cercles bitangents de première espèce à contacts imaginaires [**33**], on peut démontrer que OH, OK, HK sont proportionnels à c^2, b^2, a^2 ; il vient donc

$$\frac{c^2}{\mathrm{OH}} = \frac{b^2}{\mathrm{OK}} = \frac{a^2}{\mathrm{HK}} = \mathrm{OS}.$$

De là il suit que la droite KV est la polaire de S dans le cercle décrit sur le petit axe comme diamètre et dans l'ellipse. Elle l'est aussi dans le cercle bitangent, car de :

$$\mathrm{HS} = \frac{\overline{\mathrm{HF}}^2}{\mathrm{OH}}, \quad \mathrm{HK} = \frac{a^2}{c^2}\,\mathrm{OH},$$

on conclut

$$\mathrm{HS.\,HK} = \frac{a^2}{c^2}\,\overline{\mathrm{HF}}^2 = r^2,$$

r désignant le rayon du cercle.

Il reste a démontrer que tout point de KV à la même polaire dans ce cercle et dans l'ellipse. Le raisonnement serait le même que celui qui a été employé lorsqu'il s'agissait des cercles de première espèce [**35**].

Nous renverrons au § **36** par une propriété analogue à celle qui y a été établie, et au § **38** pour les énoncés de problèmes.

(*A suivre*).

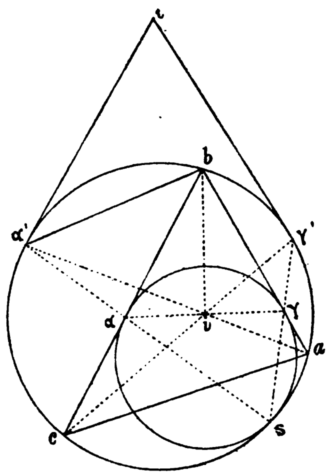
NOUVELLES DÉMONSTRATIONS (*)
D'UN THÉORÈME DE M. MANNHEIM

Le cercle inscrit dans l'angle abc, *et qui est tangent intérieurement en* s *au cercle circonscrit au triangle* abc, *touche les côtés* cb, ba *aux points* α, γ : *le milieu* i *du segment* $\alpha\gamma$ *est le centre du cercle inscrit au triangle* abc. Le point s est un centre de similitude des deux cercles qui se touchent en ce point. La droite $s\alpha$ rencontre le cercle abc au point α' homologue de α. La tangente en α' au cercle abc est alors parallèle à ab, par suite le

(*) Communiquées par M. Mannheim.

point α' est le milieu de l'arc $b\alpha'c$; de même γ' est le milieu de l'arc $a\gamma'b$, Les droites $a\alpha'$, $c\gamma'$ se coupent alors au point i centre du cercle inscrit au triangle abc. La figure $abc\gamma's\alpha'a$ étant un hexagone inscrit dans le cercle abc, les points de rencontre α, i, γ des côtés de cet hexagone sont en ligne droite. Ainsi i est sur $\alpha\gamma$, et comme ce centre i est aussi sur la bissectrice de l'angle au sommet du triangle isoscèle $\alpha b\gamma$, *ce point est le milieu de la base* $\alpha\gamma$ de ce triangle.

Autrement. — Supposons démontré, comme précédemment, que α' et γ' sont les milieux des arcs sous-tendus par bc, ba. Le point de rencontre t des tangentes $\alpha't$, $\gamma't$ étant l'homologue de b, il est situé sur la droite sb. Les droites $\alpha't$, $\alpha'b$, $\alpha'\gamma'$, $\alpha's$ forment un faisceau harmonique, par suite αb, parallèle à $\alpha't$, est partagée en deux parties égales par $\alpha'\gamma'$ (*). La droite $\alpha\gamma$, parallèle à $\alpha'\gamma'$, puisque c'est son homologue contient alors le symétrique i de b par rapport à $\alpha'\gamma'$. Ce point symétrique est à la rencontre de la circonférence décrite de α' comme centre avec $\alpha'b$ pour rayon et de la circonférence dé crite de γ' comme centre avec $\gamma'b$ pour rayon, c'est donc le centre du cercle inscrit au triangle abc. On voit ainsi que ce centre i est sur $\alpha\gamma$ le pied de la perpendiculaire abaissée de b sur cette droite : *c'est donc le milieu de* $\alpha\gamma$.



Autrement. — Appelons circonférence C une circonférence de cercle qui passe par les extrémités des côtés d'un triangle et qui rencontre à angles droits la bissectrice intérieure issue du sommet opposé à ce côté. On sait qu'*une circonférence* C *contient les centres du cercle inscrit et du cercle ex-inscrit situés sur cette bissectrice.*

(*) Cette droite n'est pas tracée sur la figure, ni la droite *sbt*.

Transformons par inversion cette propriété. Prenons pour pôle d'inversion le sommet b du triangle considéré. Soient a, c les inverses des autres sommets de ce triangle. Le cercle ex-inscrit dont le centre est sur la bissectrice intérieure issue de b, a pour inverse le cercle $as\gamma$. Comme l'inverse du centre de ce cercle ex-inscrit est sur $\alpha\gamma$ et sur la bissectrice de l'angle $\alpha b\gamma$, il est alors le milieu i de $\alpha\gamma$. Mais la transformée de la circonférence C qui contient le centre du cercle ex-inscrit, est une circonférence C qui passe par a, c et i, comme cette courbe doit couper la bissectrice bi au centre du cerle inscrit, on voit que *ce centre est le milieu* i *de* $\alpha\gamma$.

NOTE SUR L'ARITHMÉTIQUE BINAIRE

Par M. **Ed. Collignon**, Inspecteur général des Ponts-et-Chaussées, en retraite.

(*Suite*, v. 1897 ; p. 101).

Passons à la représentation des fractions.

Les nombres binaires 0,1, 0,01, 0,001,.....

représentent les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,..... ;

généralement, l'unité à la suite de $n - 1$ zéros placés après la virgule, représente, dans le système binaire, la fraction $\frac{1}{2^n}$.

Pour exprimer dans le même système une fraction quelconque, $\frac{1}{7}$ par exemple, on procédera comme pour la conversion en fraction décimale, sauf qu'au lieu de multiplier par 10 les restes successifs pour les diviser ensuite par 7, on devra les multiplier par 2. L'opération s'effectue comme il suit :

$$\begin{array}{r|l}
1 & 7 \\ \cline{2-2}
\times 2 & 0{,}001001001.... \\ \cline{1-1}
2 & \\
\times 2 & \\ \cline{1-1}
4 & \\
\times 2 & \\ \cline{1-1}
8 & \\
-7 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}$$

La période du quotient se dessine au troisième chiffre après la virgule, puisque l'opération ramène le reste 1, égal au numérateur de la fraction donnée. Le quotient est la traduction dans le système binaire de la progression géométrique

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \ldots\ldots,$$

dont la somme est en effet égale à $\frac{1}{7}$.

Si l'on suit la même marche pour la fraction $\frac{1}{17}$, on trouve le développement

$$\frac{1}{17} = 0{,}000011110000111100001111\ldots,$$

ce que l'on peut écrire aussi, en admettant les chiffres négatifs,

$$\frac{1}{17} = 0{,}0001000\bar{1}0001000\bar{1}0001000\bar{1}\ldots\ldots$$

Le premier développement correspond à la progression géométrique

$$\frac{1}{17} = 15 \times \left(\frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{2^{24}} + \ldots\right);$$

le second à la progression

$$\frac{1}{17} = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{12}} - \frac{1}{2^{16}} + \ldots\ldots;$$

et la division y aurait directement conduit si l'on avait pris par excès le quotient lorsque le dividende partiel est égal à 16; on obtient alors un reste négatif égal à — 1.

On opérerait de même sur une fraction dont le numérateur serait différent de l'unité. On trouve par exemple

$$\begin{aligned} \frac{4}{9} &= 0{,}0111000111000\ldots\ldots \\ &= 0{,}100\bar{1}00100\bar{1}\ldots\ldots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^{10}} + \ldots\ldots \end{aligned}$$

OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES ENTIERS

De toutes les opérations de l'arithmétique, la plus difficile et la plus sujette à erreur est l'addition, lorsqu'il s'agit d'ajouter un grand nombre d'entiers. Si ces nombres sont écrits dans le système binaire, il n'y a aucune difficulté pour trouver le total des unités contenues dans une même colonne verticale, car cette opération, qui constitue l'addition à proprement parler, revient ici à compter le nombre des chiffres 1 qui figurent dans chaque colonne. La difficulté commence lorsqu'on doit écrire le total obtenu, et reporter aux colonnes suivantes les unités d'ordre supérieur qu'il renferme. Car le report suppose le total traduit dans le système binaire, ce qui ne peut se faire instantanément, sauf pour des nombres très petits. Aussi l'addition binaire, tout en étant une opération des plus simples, en théorie, entraîne-t-elle fréquemment des hésitations et des erreurs dans la pratique. L'emploi des chiffres négatifs tend à la faciliter, en réduisant les totaux partiels, et en clairsemant les chiffres significatifs des nombres sur lesquels on doit opérer.

La soustraction se ramène à l'addition, lorsqu'on admet les chiffres négatifs, en changeant le signe de tous les chiffres composant le nombre à soustraire.

EXEMPLE D'ADDITION :		EXEMPLE DE SOUSTRACTION :		
	$1010\bar{1}0010\bar{1}$		$10010\bar{1}01010\bar{1}$	
	10010101010		$\bar{1}0100\bar{1}010\bar{1}0$	nombre changé de signe ; à ajouter.
	$10\bar{1}0\bar{1}00100\bar{1}0$		$1\bar{1}1001\bar{1}\bar{1}111\bar{1}\bar{1}$	
somme	$11001001110\bar{1}$	ou bien	$1100\bar{1}00\bar{1}01\bar{1}$	
ou bien	$10\bar{1}0010100\bar{1}0\bar{1}$	ou encore	$10\bar{1}00\bar{1}00\bar{1}001$	

La multiplication binaire n'est qu'une addition, puisque chaque produit partiel, formé en multipliant par le chiffre 1, est la reproduction pure et simple du multiplicande lui-même, qu'il suffit d'écrire à la place convenable. Bien entendu, il faut tenir compte des signes si l'on a admis des chiffres négatifs. On voit que l'arithmétique binaire résout le problème que s'est proposé l'inventeur des logarithmes : elle ramène la multiplication à l'addi-

tion, mais c'est au prix d'un développement un peu long des nombres à multiplier et du produit auquel on parvient.

L'opération la plus simple est la division. Elle se fait dans le système binaire sans aucun tâtonnement, puisque l'on connaît d'avance le seul multiple du diviseur dont on puisse faire usage, à savoir le diviseur lui-même. Il convient, pour éviter toute difficulté, de ne pas admettre au dividende et au diviseur les chiffres négatifs.

EXEMPLE DE DIVISION I

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 10110111 & 1101 \\
\cline{3-3}
 & \bar{1}\bar{1}0\bar{1} & 1110 \\
\cline{2-2}
 & 10011 & \\
 & \bar{1}\bar{1}0\bar{1} & \\
\cline{2-2}
 & 1\bar{1}10 & \\
\text{ou bien} & 1101 & \\
 & \bar{1}\bar{1}0\bar{1} & \\
\cline{2-2}
 & 01 &
\end{array}
$$

Le quotient est $1110 = 100\bar{1}0$, et le reste est l'unité. Pour donner un exemple de multiplication binaire, nous nous arrêterons un moment sur l'élévation d'un nombre au carré. Au lieu d'écrire le nombre avec les chiffres binaires, mettons en évidence les puissances de 2 dont le nombre N se compose, et supposons qu'on ait

$$N = 2^\alpha + 2^\beta + 2^\gamma + \ldots.. + 2^\delta.$$

Le carré de N sera égal à l'expression

$$
\begin{aligned}
N^2 &= 2^{2\alpha} + 2 \times 2^{\alpha+\beta} + 2^{2\beta} + 2 \times 2^{\alpha+\gamma} \\
&\quad + 2 \times 2^{\beta+\gamma} + 2^{2\gamma} + \ldots.. \\
&= \sum 2^{2\alpha} + \sum 2^{\alpha+\beta+1};
\end{aligned}
$$

la première somme comprend autant de termes que l'expression de N, mais avec des exposants doublés ; la seconde, une série de puissances de 2, dont les exposants sont les sommes des exposants donnés pris deux à deux, avec addition d'une unité. Si n est le nombre des puissances de 2 dont la somme forme le nombre N, l'expression de N^2 contiendra avant toute réduction n termes de

la forme $2^{2\alpha}$, et $\frac{n(n-1)}{2}$ termes de la forme $2^{\alpha+\beta+1}$. L'ensemble se prête en général à des réductions importantes, lorsqu'il renferme plusieurs puissances de 2 égales, et plusieurs puissances consécutives. Si l'on a par exemple trois termes

$$2^{14} + 2^{13} + 2^{12} \times 2,$$

on observera que

$$2^{12} \times 2 = 2^{13}, \quad 2^{13} \times 2 = 2^{14}, \quad 2^{14} \times 2 = 2^{15}$$

et ces trois termes se fusionnent en un terme unique, 2^{15}.

Soit à élever au carré le nombre

$$N = 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2 + 1,$$

traduction du nombre binaire $10110111 = 10\bar{1}00\bar{1}00\bar{1}$. Le carré de ce nombre correspondra les termes suivants :

$$N^2 = \left\{\begin{array}{l} 2^{14} + 2^{10} + 2^8 + 2^4 + 2^2 + 1 \\ + 2^{13} + 2^{12} + 2^{10} + 2^9 + 2^8 \\ \quad 2^{10} + 2^8 + 2^7 + 2^6 \\ \quad + 2^7 + 2^6 + 2^5 \\ \quad + 2^4 + 2^3 \\ \quad + 2^2 \end{array}\right.$$

$$= 2^{14} + 2^{13} + 2^{12} + 2^{10} \times 2 + 2^{10} + 2^9 + 2^8 \times 2$$
$$+ 2^8 + 2^7 \times 2 + 2^6 \times 2$$
$$+ 2^5 + 2^4 \times 2$$
$$+ 2^3 + 2^2 \times$$

$$2^{15} \quad + \quad 2^9 \quad + \quad 2^7 \quad + \quad 2^6 \quad + \quad 2^4$$

c'est-à-dire le nombre 1000001011010001

$$= 1000010\bar{1}0\bar{1}010001.$$

Dans cet exemple, pris au hasard, le nombre N et son carré N^2 ont le même nombre de chiffres significatifs, quand on se borne aux chiffres positifs.

Caractères de divisibilité d'un nombre binaire par un nombre premier $p > 2$.

Le nombre N est exprimable par une somme de puissances de 2.

Supposons que les termes de la somme soient tous positifs, de sorte qu'on ait l'égalité

$$N = 2^\alpha + 2^\beta + 2^\gamma + \dots + 2^\delta.$$

Le reste de la division de N par p sera congru (mod. p) à la somme des restes fournis par les divers termes 2^α, 2^β, ... 2^δ. Si l'on considère la suite des puissances de 2, on observe que les restes de la division par p de ces puissances successives sont assujettis à une loi de périodicité. Le théorème de Fermat montre en effet que l'on retrouve le reste 1 quand on divise par p la puissance de 2 dont le degré est $p - 1$, comme quand on opère sur $2^0 = 1$; dans certains cas, on retrouve le reste 1 pour un exposant moindre, diviseur de $p - 1$. Au-delà, les restes se reproduisent périodiquement.

Prenons pour exemple le nombre $p = 7$. On aura pour les puissances 2^0, 2^1, 2^2 les restes 1, 2 et 4 ; et ces restes se reproduiront au-delà dans le même ordre, de sorte qu'on pourra poser d'une manière générale

$$\left.\begin{aligned} 2^{3k} &\equiv 1 \\ 2^{3k+1} &\equiv 2 \\ 2^{3k+2} &\equiv 4 \end{aligned}\right\} \text{(module 7)}.$$

Que l'on donne donc un nombre écrit dans le système binaire, 100111010011, ce nombre est égal à la somme

$$2^{11} + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^1 + 2^0;$$

et en se reportant au tableau des restes, on voit qu'elle est congrue à la somme

$$4 + 4 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 \equiv 2 \text{ (module 7)}.$$

On aurait pu opérer sur le nombre écrit plus simplement avec des chiffres négatifs. On aurait trouvé

$$\begin{aligned} 1010\bar{0}1010\bar{1}\ldots 10\bar{1} = 101\bar{0}01010\bar{1}01\bar{1} &= 2^{11} + 2^9 - 2^6 + 2^4 + 2^2 - 2^0 \\ &\equiv 4 + 1 - 1 + 2 + 4 - 1 \\ &\equiv 9 \equiv 2 \text{ (module 7)}. \end{aligned}$$

(*A suivre*).

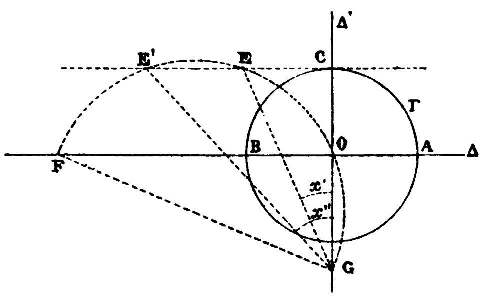
SUR LA
CONSTRUCTION DES RACINES DE L'ÉQUATION
$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x = c.$

Dans l'ouvrage de M. Vaes (*Goniometrische Studie*; n° 11, p. 17), ouvrage que nous avons signalé précédemment, (p. 109) on trouve une construction des racines de l'équation

(1) $$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x = c.$$

J'indiquerai d'abord cette construction.

Soient Δ, Δ' deux diamètres rectangulaires dans un cercle Γ de rayon b.



Prenons $CG = a$, $OF = C$ et, sur FG comme diamètre décrivons un demi-cercle qui coupe la tangente, en C, à Γ aux points E, E'. Les angles $EGC = x'$, $E'GC = x''$, sont les racines de (1).

On a, en effet,

$$CE.CE' = CO.CG, \quad \text{ou} \quad a \operatorname{tg} x'.a \operatorname{tg} x'' = a.b;$$

et, par conséquent,

(2) $$\operatorname{tg} x'. \operatorname{tg} x'' = \frac{b}{a}.$$

On a, aussi,

(3) $$CE + CE' = OF, \quad \text{ou} \quad a(\operatorname{tg} x' + \operatorname{tg} x'') = c.$$

Les relations (2), (3) prouvent que $\operatorname{tg} x'$, $\operatorname{tg} x''$ sont les racines de (1).

En posant $\operatorname{tg} x = z$, l'équation (1) prend la forme

$$az^2 - cz + b = 0,$$

et le problème qui nous occupe est identique au problème classique, problème dans lequel on propose de construire les racines d'une équation du second degré. On sait comment on réalise cette con-

struction et comment on la ramène à un problème de géométrie élémentaire : *trouver deux lignes, connaissant leur somme et l'aire du rectangle construit avec ces deux lignes.*

Les équations (2), (3) montrent comment M. Vaes, dans le tracé que nous venons de résumer, a réalisé la construction élémentaire que nous venons de rappeler.

On peut, d'ailleurs, de ce tracé, comme l'a montré M. Vaes (*loc. cit.*), déduire la condition de réalité des racines de l'équation (1).

En faisant connaître cette solution, j'ajouterai quelques réflexions portant sur les équations trigonométriques, envisagées à un point de vue général.

A chaque équation trigonométrique, ou algébrique, correspondent, pour trouver les valeurs de l'inconnue, des tracés en nombre infini; il y a lieu de rechercher les plus simples d'entre eux; qu'on se place au point de vue géométrographique, ou à un autre; au point de vue pédagogique notamment, dont la simplicité peut être, je crois, ainsi définie : *le tracé le plus simple est celui que les élèves comprennent avec l'effort d'attention le plus faible et qu'ils retiennent le plus facilement.*

Pour se rapprocher de cet idéal, il faut chercher des tracés méthodiques, découlant d'une idée applicable à un groupe déterminé de problèmes. Ces tracés varient sans doute avec les divers exemples proposés; mais ils se rattachent à un point central d'où découlent, avec la variété inévitable, inhérente à chacun d'eux, les solutions particulières qu'ils comportent.

Prenons le problème du tracé graphique des racines d'une équation trigonométrique; quelle est l'idée générale qui domine sa solution? En désignant par u, v les deux lignes trigonométriques qui entrent dans l'équation considérée (il n'y en a jamais plus de deux, si l'on utilise les formules fondamentales de la trigonométrie), on aura donc une relation $f(u, v) = 0$. Mais, entre u, v, existe une certaine égalité $\varphi(u, v) = 0$.

Alors, en prenant deux axes Ou, Ov, on obtiendra le tracé cherché en construisant, dans ce système, les deux courbes qui correspondent aux équations $f = 0$, $\varphi = 0$.

Ainsi pour l'équation

$$(1') \qquad a \sin x + b \cos x = c,$$

la méthode conduit, systématiquement, à construire une droite Δ,

$$(\Delta) \equiv au + bv - c = 0,$$

et un cercle Γ,

$$(\Gamma) \equiv u^2 + v^2 - 1 = 0.$$

C'est ainsi que nous avons été conduit à la solution que rappelait M. Vaes (*Journal*, p. 110)

Si nous prenons maintenant l'équation (1), la méthode que nous indiquons ici nous conduit à poser (*)

$$a \operatorname{tg} x = u, \quad b \operatorname{tg} y = v,$$

et à considérer les deux équations

$$u - v = c, \quad uv = ab.$$

Dans ces formules a, b, c, sont des lignes données; on est ainsi ramené, par une voie naturelle, au problème classique rappelé plus haut.

On sait d'ailleurs que le problème qui correspond à (1) peut être ramené à celui qui correspond à l'équation (1′) puisque l'équation

$$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x = c,$$

peut s'écrire

$$c \sin 2x + (a - b) \cos 2x = a + b.$$

G. L.

RELATIONS MÉTRIQUES
ET TRIGONOMÉTRIQUES ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **Lecocq**, ancien professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, 1897; p. 111).

23. — *Formules relatives au point* N *et à son conjugué* N′.
La point N de rencontre de IP et de la circonférence O est le centre commun des cercles inscrits dans les triangles

(*) Cette idée et quelques-unes des applications qui s'y rattachent, notamment la résolution graphique des équations (1), (1′) ont été exposées par nous dans le *Bulletin Scientifique*; 1889, p. 60 à 66.

BPD et APC. La position de ce point est déterminée par la relation :

$$\frac{PN}{IN} = \frac{hl}{2kf}, \quad \text{d'où} \quad IN = \frac{2kf IP}{hl + 2kf},$$

et

$$PN = \frac{2Sabcd}{fhl(hl + 2kf)},$$

et celle de son conjugué N′ par

$$\frac{PN'}{IN'} = \frac{ht}{2kf}, \quad \text{d'où} \quad IN' = \frac{2kf IP}{hl - 2kf},$$

et

$$PN' = \frac{2Sabcd}{fhl(hl - 2kf)}.$$

On peut vérifier que : $PN. PN' = PO. PI = \overline{P\omega}^2$.

Les coordonnées du point N sont :

$$x = \frac{(a-c)\left[k(d+b)^2 - 2fhl\right]}{8f(b+d)\sqrt{(p-a)(p-c)}}, \quad y = \frac{(d-b)\left[k(a+c)^2 - 2fhl\right]}{8f(a+c)\sqrt{(p-b)(p-d)}}.$$

D'autre part :

$$\widehat{BPD} = 2^{dr} - 2A, \qquad \widehat{APD} = 2^{dr} - 2D,$$

$$\widehat{BPI} = \widehat{DPI} = 1^{dr} - A = \widehat{ODI}, \qquad \widehat{API} = \widehat{CPI} = 1^{dr} - D = \widehat{OAI},$$

on déduit de là les distances Δ_m et Δ_n du centre O aux diagonales.

$$\Delta_m = R \cos D, \qquad \Delta_n = R \cos A; \qquad \text{d'où:}$$

rayon du cercle inscrit à BPD : $\quad NP \cos A = \dfrac{2Sabcd \cos A}{fhl(hl + 2kf)},$

rayon du cercle inscrit à APC : $\quad NP \cos D = \dfrac{2Sabcd \cos D}{fhl(hl + 2kf)},$

rayon du cercle circonscrit à BPD : $\quad \dfrac{n}{2 \sin 2A},$

rayon de cercle circonscrit à APC : $\quad \dfrac{m}{2 \sin 2D}.$

24. — *De quelques coefficients angulaires; tangentes trigonométriques des angles* A, B, C, D ; *tangentes des angles que les diagonales font avec les côtés.*

On a :

$$\begin{array}{l|l} SH & \frac{\delta^2}{\alpha\beta}, \\ SK & \frac{-\delta^2}{\alpha\beta}, \\ QH & \frac{\alpha\beta}{\gamma^2}, \\ QK & -\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}, \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} SI & -\frac{\delta\gamma}{\alpha^2}, \\ SO & \frac{\delta\gamma}{\beta^2}, \\ QI & -\frac{\beta^2}{\delta\gamma}, \\ QO & \frac{\alpha^2}{\delta\gamma}, \end{array} \qquad \begin{array}{l} \operatorname{tg} A = \frac{\delta\gamma - \alpha\beta}{\alpha\gamma + \beta\delta}, \\ \operatorname{tg} B = \frac{-(\delta\gamma + \alpha\beta)}{\alpha\gamma - \beta\delta}, \\ \operatorname{tg} C = -\frac{\delta\gamma - \alpha\beta}{\alpha\gamma - \beta\delta}, \\ \operatorname{tg} D = \frac{\delta\gamma + \alpha\beta}{\alpha\gamma - \beta\delta}, \end{array}$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{m,a}) = \operatorname{tg}(\widehat{n,c}) = \frac{\alpha(\delta-\beta)}{\alpha^2+\delta\beta}, \quad \operatorname{tg}(\widehat{m,b}) = \operatorname{tg}(\widehat{n,d}) = \frac{\beta(\gamma+\alpha)}{\alpha\gamma-\beta^2},$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{m,d}) = \operatorname{tg}(\widehat{n,b}) = \frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\beta^2+\alpha\gamma}, \quad \operatorname{tg}(\widehat{m,c}) = \operatorname{tg}(\widehat{n,a}) = \frac{\alpha(\beta+\delta)}{\alpha^2-\beta\delta}.$$

25. *Rayons des cercles tangents à trois côtés consécutifs : 1° intérieurs* $\rho_a, \rho_b, \rho_c, \rho_d$; 2° *extérieurs* $\rho'_a, \rho'_b, \rho'_c, \rho'_d$ (l'indice correspond au côté intermédiaire touché par le cercle).

$$\frac{\rho_a}{a(p-a)(d+b)\cos^2\frac{I}{2}} = \frac{\rho_b}{b(p-b)(a+c)\sin^2\frac{I}{2}}$$

$$= \frac{\rho_c}{c(p-c)(d+b)\cos^2\frac{I}{2}} = \frac{\rho_d}{d(p-d)(a+c)\sin^2\frac{I}{2}}$$

$$= \frac{\rho'_a}{a(p-c)(d+b)\cos^2\frac{I}{2}} = \frac{\rho'_b}{b(p-d)(a+c)\sin^2\frac{I}{2}}$$

$$= \frac{\rho'_c}{c(p-a)(d+b)\cos^2\frac{I}{2}} = \frac{\rho'_d}{d(p-b)(a+c)\sin^2\frac{I}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}(a+c)(d+b)\sin I}.$$

Soient : U_b, U'_b, U_d, U'_d les centres des cercles situés sur SL.
V_a, V'_a, V_c, V'_c les cercles des cercles situés sur QL.

$$LU_b = \frac{1}{2} hl \sqrt{\frac{p-b}{p-d}} \frac{\varepsilon}{(a+c)(d+b)},$$

$$LV_a = \frac{1}{2} hl \sqrt{\frac{p-a}{p-c}} \frac{\varepsilon}{(a+c)(d+b)},$$

$$\mathrm{LU}_d = \frac{1}{2} hl \sqrt{\frac{p-d}{p-b}} \frac{-\varepsilon}{(a+c)(d+b)},$$

$$\mathrm{LV}_c = \frac{1}{2} hl \sqrt{\frac{p-c}{p-a}} \frac{-\varepsilon}{(a+c)(d+b)},$$

$$\mathrm{LU'}_b = \frac{1}{2} hl \sqrt{\frac{p-d}{p-b}} \frac{2p}{(a+c)(d+b)},$$

$$\mathrm{LV'}_a = \frac{1}{2} hl \sqrt{\frac{p-c}{p-a}} \frac{-2p}{(a+c)(d+b)},$$

$$\mathrm{LU'}_d = \frac{1}{2} hl \sqrt{\frac{p-b}{p-d}} \frac{-2p}{(a+c)(d+b)},$$

$$\mathrm{LV'}_c = \frac{1}{2} hl \sqrt{\frac{p-a}{p-c}} \frac{2p}{(a+c)(d+b)}.$$

Ces formules font connaître les éléments linéaires des quadrilatères inscriptibles obtenus par les rencontres des bissectrices intérieures ou extérieures de ABCD ; savoir : $U_bU_dV_aV_c$ et $U'_bU'_dV'_aV'_c$ dont les éléments angulaires sont d'aillenrs connus.

Rayons des cercles circonscrits aux triangles aQ, bS, cQ, dS.

$$\mathfrak{R}_a = \frac{ah^2l^2}{4S(a^2-c^2)}, \quad \mathfrak{R}_b = \frac{bh^2l^2}{4S(d^2-b^2)}.$$

$$\mathfrak{R}_c = \frac{ch^2l^2}{4S(a^2-c^2)}, \quad \mathfrak{R}_d = \frac{dh^2l^2}{4S(d^2-b^2)}.$$

Comme épreuve des formules ci-dessus et de celles qui donnent les coordonnées du centre O en fonction de α, β, γ, δ, on propose de vérifier l'identité suivante dans laquelle on sait que : $\theta^2 = \alpha^2 + \beta^2$ et $\mu^2 = \beta^2 + \gamma^2$:

$$\left\{ \frac{\alpha^2\mu^2}{\beta(\gamma^2-\alpha^2)} - \frac{\beta(\gamma\theta - \alpha\mu)}{\gamma\theta + \alpha\mu} \right\}^2 + \frac{\gamma^2\theta^4}{(\gamma^2-\alpha^2)^2}$$

$$= \frac{\theta^2\gamma\mu}{\beta(\gamma^2-\alpha^2)} \left\{ \frac{\theta^2\gamma\mu}{\beta(\gamma^2-\alpha^2)} - \frac{4\alpha\beta\gamma}{\gamma\theta+\alpha\mu} \right\},$$

qui a été obtenue en appliquant la formule d'Euler $D^2 = R(R-2r)$ au triangle résultant de l'hypothèse $b = o$ ou $\delta = \beta$ (coïncidence des points B, C, S, I et P).

En remplaçant dans cette identité μ par $-\mu$, on aura celle qui convient au cercle ex-inscrit tangent au côté d.

Quant à celle qui répond à l'ex-inscrit qui touche a, on trouvera :

$$\left\{\frac{\alpha^2\mu^2}{\beta(\gamma^2-\alpha^2)}+\beta\right\}+\left\{\frac{\gamma\theta^2}{\gamma^2-\alpha^2}-\frac{2\gamma\theta}{\mu-\theta}\right\}^2=\frac{\theta^2\gamma\mu}{\beta(\gamma^2-\alpha^2)}\left\{\frac{\theta^2\gamma\mu}{\beta(\gamma^2-\alpha^2)}+\frac{4\beta\gamma}{\mu-\theta}\right\},$$

et si enfin, dans cette dernière, on remplace μ par $-\mu$ on aura celle qui convient au cercle ex-inscrit tangent au côté c.

(*A suivre*).

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir 1897, page 114)

TORRICELLI

Presque en même temps que Cavalieri, Roberval avait imaginé également une méthode de mesurage identique à la sienne, et qu'il avait découverte par la lecture approfondie des œuvres d'Archimède. Comme les travaux de Roberval n'ont été publiés que près de soixante ans après ceux de Cavalieri, ils n'ont guère contribué au progrès de la Géométrie de la mesure que par l'émulation qu'ils ont produite chez Pascal (*). Nous en dirons autant de certains écrits de Fermat.

Il n'en est pas de même de l'opuscule de Torricelli : *Quadratura parabole* (Florence, 1644), où il montre une nouvelle manière d'employer la méthode des indivisibles. Nous allons traiter, d'après lui, la mesure du cercle et celle du cône, de la sphère et du solide produit par une hyperbole équilatère tournant autour de son asymptote.

La surface d'un cercle est égale à celle d'un triangle rectangle dont les côtés sont respectivement égaux au rayon et à la circonférence. Soient le cercle O et le triangle rectangle OAB (*fig.* 37), qui sont dans ce cas. Menons dans le triangle, et parallèlement à AB, la droite quelconque MP, qui est égale

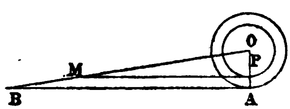


Fig. 37

(*) Nous en dirons un mot plus loin, en parlant de Pascal.

à la circonférence de rayon OP. Toutes les droites du triangle sont ainsi égales aux circonférences du cercle : de là le théorème.

Un cône circulaire droit égale le tiers du cylindre circonscrit. Supposons d'abord le rayon égal à la hauteur (*fig.* 38), sur le cercle MN produit dans le cône par une section parallèle à la base AB, construisons un cylindre QN, dont la surface latérale sera égale au cercle MN ; par suite, la somme des surfaces latérales de tous les cylindres analogues, c'est-à-dire le volume concave ADSBC, est égal à la somme des cercles MN, c'est-à-dire le cône SAB, lequel est donc le tiers du cylindre.

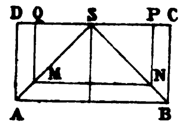


Fig. 38

Soit maintenant un cône quelconque A : considérons le cône B de même hauteur et dont le rayon de la base est égal à cette même hauteur. Les sections de A et de B à des hauteurs égales sont dans un rapport constant, qui est aussi celui des sections des cylindres circonscrits. Donc,

$$\frac{A}{B} = \frac{\text{cyl. cir. à A}}{\text{cyl. cir. à B}}$$

comme B est le tiers du cylindre qui lui est circonscrit, il en est de même de A.

La démonstration de Torricelli n'est pas tout à fait celle que nous venons d'exposer. Il considère, d'emblée, un cône quelconque, ce qui lui donne

$$\frac{MQ}{AD} = \frac{QS}{SD},$$

d'où

$$\frac{MQ.QS}{AD.SD} = \frac{\overline{QS}^2}{\overline{SD}^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{MQ.QS}{\overline{QS}^2} = \frac{AD}{SD} = c^{te}.$$

Or, les tranches enroulées les unes autour des autres et constituant le solide creux désigné tout à l'heure ont une épaisseur égale à celle des tranches empilées du cône, leurs nombres sont comme SD à AD ; par conséquent

$$\frac{\Sigma(\text{tr. MQ})}{\Sigma(\text{tr. MN})} = \frac{AD}{SD}\,\frac{SD}{AD} = 1$$

il s'ensuit que, dans tous les cas, le cône est égal au reste du cylindre.

La sphère équivaut à la moitié du cône dont la hauteur et le rayon sont égaux au diamètre de la sphère. On a (*fig.* 39)

$$MP^2 = SP.PC = KP.KH$$

donc le cercle MN est égal à la moitié de la surface latérale du cylindre KG, et par suite, la somme des cercles tels que MN, ou la sphère, égale à la moitié de la somme des surfaces cylindriques analogues, ou le cône (*).

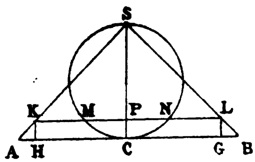


Fig. 39

Le solide produit par la révolution de l'hyperbole équilatère AM (*fig.* 40) *tournant autour de l'asymptote* OS *est égal au cylindre* AB, A *désignant le sommet.* On a en effet

$$MP.MS = \overline{AE}^2;$$

ce qui montre que la surface latérale du cylindre MP a une valeur constante, qui est celle du cercle, base du cylindre AD. On peut supposer autant de tranches analogues à MP que de tranches circulaires composant le cylindre AD; et, de plus, comme CO = CA, les premières de ces tranches auront une hauteur égale à celle des deuxièmes. Donc le solide proposé est égal au cylindre, quoi que l'aire de la surface génératrice soit infinie.

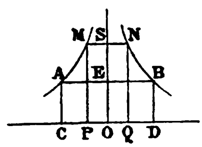


Fig. 40

C'est à Torricelli qu'est due la formule donnant l'expression du volume d'un solide en fonction des bases supérieure, médiane et inférieure, quand les sections de ce solide sont des coniques. (Voir la note IV). (*A suivre*).

(*) Torricelli avait déjà donné (*De sol. sph.*) une démonstration rigoureuse par la méthode des Anciens du volume de la sphère. Dans cet ouvrage, écrit probablement avant qu'il ait connu la *Geom. indiv.* de Cavalieri, il démontre ce volume par la même méthode que celle de la proposition V du livre III de ce dernier ouvrage, en décomposant la sphère, le cylindre et le cône en tranches d'égales hauteurs, en se servant du théorème d'Archimède.

BIBLIOGRAPHIE

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE de A. AMIOT ; *nouvelle édition, entièrement refondue* par F. VINTÉJOUX (*Librairie Delagrave*, 1897).

Au moment où, comme j'ai dû l'annoncer récemment à M. Delagrave, l'état de ma santé me force, à mon très vif regret, à quitter la direction de ce Journal, il m'est particulièrement agréable de rendre compte, ici, de cet ouvrage. En effet, sur la première page de ce livre, je trouve, réunis par une heureuse coïncidence, trois noms qui me touchent à des titres divers ; mais, tous les trois, bien profondément. Amiot, c'est avec le vieux traité de Legendre, le premier livre de Géométrie que j'ai lu, aux premiers jours de mon instruction mathématique ; M. Vintéjoux, c'est le nom du collègue aimable, de l'ami si sûr que j'ai appris à estimer toujours un peu plus depuis vingt ans ; M. Delagrave, enfin, l'éditeur de ce livre, l'homme auquel, soit par ma collaboration au *Journal de mathématiques*, soit par les ouvrages que j'ai publiés chez lui, je suis attaché depuis longtemps, et par des liens si sympathiques. On comprend que, tous ces souvenirs ne peuvent me pousser, dans l'analyse de cet ouvrage, qu'à un jugement absolument optimiste ; mais je le formule sans réserve, sans avoir à craindre que les sympathies que je viens de rappeler puissent me conduire à l'exagération ; le livre actuel est, dans son genre, une perfection.

La caractéristique de l'ouvrage d'Amiot, le côté original qui a fait son succès, un succès qui a résisté à l'usure attristante des années, c'est l'excellence du plan qu'il a conçu pour écrire son livre ; notamment, cette division en leçons, division faite avec l'habileté qui pouvait appartenir au professeur incomparable qu'était Amiot.

M. Vintéjoux a eu mille fois raison de ne pas toucher à cette caractéristique et de conserver le plan original de l'ouvrage ; ce plan est parfait. Que fallait-il pour remettre la Géométrie d'Amiot dans le courant pédagogique moderne ? Au fond, bien peu de chose. Il fallait simplement, complétant l'œuvre que M. Vintéjoux avait entreprise déjà en 1880, et menée à bien, ajouter, tout en maintenant le plan général, quelques développements plaçant la Géométrie d'Amiot au niveau des perfectionnements qui ont été introduits, en ces dernières années, dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire. C'est ce qui a été fait excellemment, dans un style simple, clair et bien français.

M. Vintéjoux, en me causant dernièrement de ce livre dont l'apparition était prochaine, m'a donné toutes les raisons (excellentes, mais trop longues à exposer ici) pour lesquelles il n'a fait ni la citation de noms d'auteurs, ni l'indication de certaines sources scientifiques auxquelles il a puisé le fond de quelques démonstrations.

Il m'a prié pourtant, sachant que je me proposais, avant de quitter le Journal, le plaisir de consacrer quelques lignes à l'analyse de cet ouvrage, de signaler deux emprunts qu'il a faits au *Journal de mathématiques élémentaires*.

On trouvera, p.p. 367 et suivantes, le développement de la théorie relative au déplacement des figures égales dans l'espace. Le sujet est délicat et l'on sait qu'il n'a pas toujours été exposé avec toute la rigueur voulue. Cette rigueur existe complètement dans le chapitre que nous signalons, et dont les premiers paragraphes ont été inspirés par un article de M. Tarry (*loc. cit.*, 1895, p. 79).

Enfin, M. Vintéjoux m'a encore prié de faire savoir que la démonstration, à la forme près, du théorème II de la page 551 est empruntée à un article de M. Dorlet (*loc. cit.*, 1894, p. 241).

On trouvera à la fin de l'ouvrage, que nous signalons aux élèves comme un guide excellent et d'une parfaite clarté, un chapitre consacré à la géométrie du triangle ; géométrie qui, aujourd'hui, malgré quelques oppositions dues à des préventions qui ont fini par s'éteindre, a pénétré dans l'enseignement élémentaire. Peut-être le chapitre est-il un peu court, et il m'a semblé qu'il gagnerait à être complété dans la future édition.

Mais je sais que l'ouvrage d'Amiot est avant tout un livre qui doit rester simple. Il n'a aucune prétention à l'encyclopédie, il ne vise pas à donner tous les résultats, mais seulement ceux qui doivent être mis en première ligne et qui peuvent être considérés comme indispensables ; c'est probablement pour se conformer à cet esprit général du livre que le chapitre en question se trouve quelque peu écourté. G. L.

EXERCICES

27. — *Le cercle qui passe par les centres des cercles ex-inscrits à un triangle a pour centre le symétrique du centre du cercle inscrit par rapport au centre du cercle circonscrit.*

(M).

28. — *Les bissectrices intérieures des angles d'un triangle* abc *sont les hauteurs du triangle qui a pour sommets les points où ces bissectrices rencontrent le cercle circonscrit* abc. (M).

29. — *On donne deux circonférences de cercles dont l'une a son centre* o *sur l'autre. Par* o, *on mène une transversale qui rencontre en courbes l'une en* a, *l'autre en* b ; *par le milieu de* ab, *on élève une perpendiculaire à cette droite : démontrer que cette perpendiculaire reste tangente à un cercle, lorsque la transversale tourne autour de* o. (M).

30. — *Dans un triangle* Δ *où* HO *est parallèle à* BC :

1° *la droite qui joint le sommet* A *au symétrique de* I *relativement à* BC *est perpendiculaire à* HI ;

2° *dans ce triangle* Δ *aucun des angles ne peut être obtus; l'angle* A *est toujours compris entre les deux autres, il ne peut varier qu'entre* 60° *et* 90°;

3° *si l'angle* (BC, HO) *est désigné par* φ, *on a :*

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos A - 2\cos B\cos C}{\sin(B-C)} = \frac{\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C - 3}{\operatorname{tg}B - \operatorname{tg}C},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b^3\cos C + c^3\cos B - a^3}{abc\sin(B-C)} = \frac{(b^2-c^2)^2 + a^2(b^2+c^2-2a^2)}{4S(b^2-c^2)}$$

$$= \frac{a^2[3(b^2+c^2-a^2) - 4h^2]}{4S(b^2-c^2)} = \frac{[12R^2 - (2a^2+b^2+c)]\operatorname{tg}A}{b^2+c^2}.$$

(Bernès).

31. — *Résoudre l'équation*

$$\frac{a\cos^2\varphi}{a-b+x} + \frac{b\sin^2\varphi}{b-a+x} = \frac{1}{2}.$$

(E. N. Barisien).

32. — *On donne deux circonférences concentriques* (C) *et* (C'). *On prend un point fixe* P *sur* (C); *une tangente mobile à* (C') *coupant* (C) *en* A *et* B; *le lieu de l'orthocentre du triangle* PAB *est un cercle.* (H. L'Huillier).

33. — *En supposant* $a > b$, *on a toujours*

$$\sqrt{4a^2 - 2b^2} - \sqrt{a^2 - b^2} > a.$$

Interpréter cette inégalité par la considération d'une ellipse dont les axes ont pour longueur 2a *et* 2b. (E. N. Barisien).

QUESTIONS PROPOSÉES

804. — On donne un triangle *asb*. Dans l'angle *asb* on inscrit un cercle tangent en *a* à *as* et un cercle tangent en *b* à *bs* : démontrer que ces courbes interceptent des segments égaux sur *ab*.

(*Mannheim*).

805. — On donne un triangle *abc* et un point *o* de son plan. Extérieurement au triangle *aob*, on mène la bissectrice de l'angle

aob, cette droite coupe *ab* en un certain point. On a de même des points sur *ac*, *bc* : démontrer que ces trois points sont en ligne droite. (*Mannheim*).

806. — La médiane *bm* d'un triangle donné *abc* est rencontrée en *d* par la perpendiculaire élevée, à *ab*, au milieu de ce côté : on mène la droite *ad*. De même, on a une droite *ce* qui joint *c* au point où *bm* est rencontrée par la perpendiculaire à *bc* élevée au milieu de ce côté.

Les droites *ad* et *ce* se coupent en *o*. Démontrer que les droites *bo*, *bm* sont également inclinées sur *ba* et *bc*. (*Mannheim*).

807. — On mène la droite qui joint le sommet *b* d'un triangle donné *abc* au milieu de la hauteur de ce triangle, qui est issue de *a*.

Cette droite coupe *ac* en un point d'où l'on mène une parallèle à *ab* et l'on obtient le point *d* à sa rencontre avec *bc*.

De même en employant la hauteur qui part de c on obtient un point *e* sur *ab*. Démontrer que *ed* est perpendiculaire à la médiane issue de *b*. (*Mannheim*).

808. — Du milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, on lui élève une perpendiculaire. Cette droite rencontre en deux points les bissectrices de l'angle droit de ce triangle : démontrer que les distances de ces points aux côtés de l'angle droit sont égales : l'une, à la demi-somme, l'autre, à la demi-différence de ces côtés. (*Mannheim*).

809. — Un triangle donné a pour sommets *a*, *b*, *c* et pour angles α, β, γ.

Démontrer que le lieu d'un point *m*, tel que

$$\overline{ma}^2 \sin 2\alpha + \overline{mb}^2 \sin 2\beta + \overline{mc}^2 \sin 2\gamma = \text{const}^{\text{te}},$$

est un cercle concentrique au cercle *abc*. (*Mannheim*).

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

SUR
LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES
Par M. A. Tissot

(*Suite*, 1897, page 121)

CONIQUES BITANGENTES A UN MÊME CERCLE

58. — *Lorsque deux coniques sont bitangentes à un même cercle, deux de leurs sécantes communes forment, avec les droites des contacts, un faisceau harmonique.*

Il résulte en effet des propriétés établies [**14** et **46**] que chaque point commun aux deux coniques fait partie du lieu des points dont les distances aux droites des contacts ont entre elles un rapport donné.

Ce rapport sera égal à l'unité si le cercle bitangent se trouve de même espèce pour les deux coniques, et que celles-ci soient semblables entre elles; alors chacune des deux sécantes coïncidera avec la bissectrice de l'un des angles des droites des contacts, et leur angle sera droit.

59. — *La polaire réciproque d'une conique par rapport à un cercle bitangent est une conique.*

Soient H (*fig.* 34) le centre du cercle, KU la droite des contacts, M un point quelconque de la conique, MU la tangente en ce point, HD la perpendiculaire abaissée de H sur MU, M′ le point de HD où se trouve le pôle de MU par rapport au cercle. On veut démontrer que le lieu de M′ est une conique.

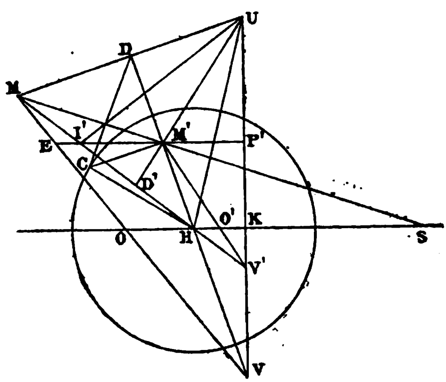


Fig. 34

Nous supposerons d'abord que le cercle bitangent soit de première espèce; alors MU ne le rencontrera pas et M′ lui sera

intérieur. Joignons, aux points D et H, l'une des extrémités C de la corde principale de M', laquelle est la corde polaire de D. Dans le triangle rectangle CDH, nous aurons $\overline{CM'}^2 = M'D.M'H$. La polaire de M dans le cercle doit passer par M'; elle doit aussi passer par U [4]; elle sera donc UM', d'où il suit que UM' est perpendiculaire à HM; soit D' le point de rencontre de ces deux lignes. De M', abaissons, sur KU, la perpendiculaire M'P' et appelons I' son intersection avec HM; dans les deux circonférences qui seraient décrites sur HU et sur I'U comme diamètres, on aurait $M'D.M'H = M'D'.M'U$ et $M'D'.M'U = M'I'.M'P'$.

Il vient donc

$$\overline{CM'}^2 = M'I'.M'P'.$$

Le saillant S doit se trouver sur la polaire double de U [1]. De plus, O étant le centre de la conique, les trois lignes MO, DH, KU doivent concourir en un point V [4]; soit E l'intersection de la première avec M'P'; sur les parallèles EP',OS, on aura

$$\frac{M'I'}{M'E} = \frac{HS}{OS}, \qquad \frac{M'E}{M'P'} = \frac{OH}{HK}.$$

De ce que KU est la polaire de S dans le cercle bitangent, on conclut $HK.HS = r^2$, r étant le rayon de ce cercle; on a aussi [21] $HK.OS = b^2$, de sorte que le rapport de HS à OS est celui de r^2 à b^2. Quant au rapport entre OH et HK, il est le même qu'entre c^2 et b^2 [22]; il vient donc

$$\frac{M'I'}{M'E} = \frac{r^2}{b^2}, \qquad \frac{M'E}{M'P'} = \frac{c^2}{b^2},$$

d'où

$$M'I' = \frac{c^2r^2}{b^4} M'P', \qquad CM' = \frac{cr}{b^2} M'P'.$$

Ainsi le rapport de CM' à M'P' est constant. On peut toujours construire une ellipse dans laquelle ce rapport soit celui de la demi-distance focale c' à la moitié b' du petit axe, et qui, de plus, admette comme cercle bitangent de seconde espèce le cercle donné, avec KU comme droite des contacts. D'après les propriétés établies [47 et 48], cette ellipse sera le lieu du point M'.

Lorsque KU rencontre le cercle, c'est-à-dire lorsque les points de contact de celui-ci avec la conique primitive sont réels, on voit de suite que la polaire réciproque touche le cercle en ces mêmes

points. Comme d'ailleurs UM', polaire de M, est tangente à la courbe en M', et que HM est perpendiculaire à UM', le centre O' doit se trouver sur la droite joignant M' au point d'intersection V' de HM avec KU [4]. Il en sera de même dans le cas des contacts imaginaires, puisque le point O' ainsi déterminé divise HK en parties proportionnelles à MI', M'P', par conséquent à $c^2r'^2$, b^4, par conséquent à c'^2, b'^2.

Les foyers seront les intersections de la perpendiculaire élevée en O', sur HK, avec la circonférence décrite sur HS comme diamètre [45]. Les sommets du petit axe seront les pôles des tangentes aux sommets de l'axe focal de la courbe primitive. Les éléments linéaires de la nouvelle courbe satisferont d'ailleurs aux relations

$$\frac{a'^2}{HK} = \frac{b'^2}{O'K} = \frac{c'^2}{O'H} = O'S.$$

Supposons maintenant que le cercle directeur de la transformation soit un cercle bitangent de seconde espèce. La tangente UM à la conique le rencontrera ; de M' on pourra lui mener une tangente, et si, au point de contact, on place la lettre C, qui servait tout-à-l'heure à désigner une extrémité de la corde principale, on pourra établir, sans rien changer à la démonstration précédente, que le rapport de M'C à M'P' est constant. Ici le centre du cercle ne se trouve plus nécessairement à l'intérieur de la conique primitive, et, quand il y aura des tangentes au cercle issues de ce point, elles fourniront, dans la transformée, des points à l'infini. Le lieu peut donc être une ellipse, une parabole ou une hyperbole, si la conique primitive est une ellipse. Lorsque celle-ci sera une hyperbole, la polaire réciproque sera aussi une hyperbole.

Problèmes. — *Construire les éléments d'une conique bitangente à un cercle donné, connaissant un point et deux tangentes;* ou bien *une tangente et deux points.*

(A suivre).

NOTE SUR L'ARITHMÉTIQUE BINAIRE

Par M. **Ed. Collignon**, Inspecteur général des Ponts-et-Chaussées, en retraite.

(*Suite*, v. 1897 ; p. 126).

PARTAGE D'UNE QUANTITÉ EN PARTIES ÉGALES

Certaines quantités peuvent être aisément divisées en deux parties égales, en 4, en 8,.,. suivant les puissances de 2, tandis qu'il n'existe pas de méthode rigoureuse pour les diviser en 3, en 5, et 7... parties. Il en est ainsi, par exemple, pour un arc de cercle. L'emploi de la numération binaire donne dans ce cas une solution approximative du problème, et l'erreur commise peut être rendue aussi petite qu'on voudra.

Soit proposé de partager une quantité en P parties égales, P étant un nombre impair donné, égal au produit de facteurs premiers npq,... Il suffira de diviser la quantité en n parties égales, l'une de ces parties en p parties, l'une de celles-ci en q parties, et ainsi de suite jusqu'à l'épuisement des facteurs de P. Nous n'avons donc à nous occuper que du partage en n parties égales, n étant un nombre premier impair.

Formons les puissances successives de 2, et soit 2^μ la plus petite puissance qui, divisée par n, laisse un reste égal à l'unité. La différence $2^\mu - 1$ sera divisible par n, et soit n' le quotient, de sorte qu'on ait

$$nn' = 2^\mu - 1.$$

On en déduit

$$\frac{1}{n} = \frac{n'}{2^\mu - 1} = n'\left(\frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{2^{2\mu}} + \frac{1}{2^{3\mu}} + \dots\right),$$

ce qui donne le développement de la fraction $\frac{1}{n}$ en fraction binaire, développement périodique, dont les valeurs successives expriment la fraction $\frac{1}{n}$ avec autant d'approximation qu'on veut, et sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 2.

Au lieu de chercher le plus petit exposant qui rende $2^\mu - 1$ divisible par n, cherchons l'exposant minimum qui rende $2^\mu + 1$

divisible par n, et soit

$$nn' = 2^{\mu} + 1,$$

n' étant un quotient entier. Il en résulte

$$\frac{1}{n} = \frac{n'}{2^{\mu}+1} = n'\left(\frac{1}{2^{\mu}} - \frac{1}{2^{2\mu}} + \frac{1}{2^{3\mu}} - \frac{1}{2^{4\mu}} + \dots\right),$$

Série à termes alternativement positifs et négatifs, qui donne un autre développement binaire de la fraction $\frac{1}{n}$. Ici, encore, la somme d'un nombre entier de périodes exprime approximativement $\frac{1}{n}$, avec autant d'approximation qu'on le veut, par une fraction dont le dénominateur est une puissance de 2; des bissection successives, répétées μ fois pour chaque terme, feront donc connaître par leur somme algébrique la quantité cherchée alternativement par défaut et par excès.

Le tableau suivant résume pour les petits nombres les résultats des deux méthodes, et permet d'écrire immédiatement les développements dont on peut avoir besoin.

μ	2^{μ}	$2^{\mu} - 1$	$2^{\mu} + 1$
1	2	1	3
2	4	3	5
3	8	7	$9 = 3^2$
4	16	$15 = 3 \times 5$	17
5	32	31	$33 = 3 \times 11$
6	64	$63 = 7 \times 9$	$65 = 5 \times 13$
7	128	127	$129 = 3 \times 43$
8	256	$255 = 5 \times 3 \times 17$	257
9	512	$511 = 7 \times 73$	$513 = 19 \times 3^3$
10	1024	$1023 = 3 \times 11 \times 31$	$1025 = 5^2 \times 41$
11	2048	$2047 = 23 \times 89$	$2049 = 3 \times 683$
12	4096	$4095 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$	$4097 = 17 \times 241$
13	8192	8191	$8193 = 3 \times 2731$
14	16384	$16383 = 3 \times 43 \times 127$	$16385 = 3 \times 5 \times 1091$
15	32768	$32767 = 7 \times 4681$	$32769 = 3^2 \times 11 \times 331$

En s'aidant des nombres inscrits dans ce tableau, on pourra

écrire immédiatement les séries qui représentent le développement binaire de certaines fractions $\frac{1}{n}$ dont le dénominateur figure au tableau.

Des nombres inscrits dans la colonne $2^\mu - 1$, on déduira les développements en progression géométrique à termes tous positifs :

$$\begin{aligned}\frac{1}{7} &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{12}} + \dots \\ &= 9 \times \left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{18}} + \dots\right) \\ &= 73 \times \left(\frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{18}} + \frac{1}{2^{27}} + \dots\right),\end{aligned}$$

qui correspondent à la fraction binaire 0,001001001... ;

$$\begin{aligned}\frac{1}{89} &= 23 \times \left(\frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{22}} + \frac{1}{2^{33}} + \frac{1}{2^{44}} + \dots\right) \\ &= (0{,}0000001011100000010111\dots\dots)_2 \\ &= (0{,}00001 0\bar{1} 00\bar{1} \mid 00001 0\bar{1} 00\bar{1} \mid \dots)_2.\end{aligned}$$

Si l'on prend les nombres de la colonne $2^\mu + 1$, les développements présenteront des termes alternés :

$$\begin{aligned}\frac{1}{17} &= \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{12}} - \frac{1}{2^{16}} + \dots \\ &= 0{,}0001 \mid 000\bar{1} \mid 0001 \mid 000\bar{1} \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{19} &= 27 \left(\frac{1}{2^9} - \frac{1}{2^{18}} + \frac{1}{2^{27}} - \frac{1}{2^{36}} + \dots\right) \\ &= 0{,}000011011 \mid 0000\bar{1}\bar{1}0\bar{1}\bar{1} \mid \dots \\ &= 0{,}000100\bar{1}0\bar{1} \mid 000\bar{1}00101 \mid \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{43} &= 3 \left(\frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{2^{21}} - \frac{1}{2^{28}} + \dots\right) \\ &= 0{,}0000011 \mid 00000\bar{1}\bar{1} \mid \dots \\ &= 0{,}000010\bar{1} \mid 0000\bar{1}01 \mid \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{257} &= \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{2^{24}} - \frac{1}{2^{32}} + \dots \\ &= 0{,}00000001 \mid 0000000\bar{1} \mid \dots\end{aligned}$$

L'opération, arrêtée à un certain terme de la série, conduit à une valeur approchée de la fraction cherchée, avec un reste. Si ce reste est suffisamment petit, il arrivera fréquemment dans les applications qu'on pourra le diviser en n parties égales sans erreur appréciable, ce qui complètera la solution.

Supposons par exemple qu'il s'agisse de diviser en sept parties égales un arc de cercle, plus petit qu'un quadrant. On cherchera par des bissections successives la valeur du huitième, du soixante-quatrième, du cinq-cent-douzième de l'arc donné. La somme que l'on obtiendra en réunissant les trois parties que l'on vient d'obtenir représentera la fraction

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{64}+\frac{1}{512}=\frac{73}{512}$$

de l'arc donné. La différence avec le septième que l'on cherche est égale à

$$\frac{1}{7}-\frac{73}{512}=\frac{1}{7\times 512}.$$

Elle est donc égale au septième de la plus petite partie obtenue, et il suffirait d'ajouter à la somme la septième partie du dernier arc qui la compose, pour avoir une correction rigoureuse de la solution approximative. Or, le cinq cent douzième de l'arc donné est assez petit, pour que, au point de vue pratique, on puisse le partager en sept parties égales à la façon d'un segment rectiligne. On obtiendra en définitive une valeur très approchée, sinon rigoureuse, du septième de l'arc donné.

(*A suivre*).

RELATIONS MÉTRIQUES
ET TRIGONOMÉTRIQUES
ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **Lecocq**, ancien professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, 1897 ; p. 134).

25. — *Autre calcul des diagonales du quadrilatère* ABCD (*fig.* 5).

Soit ABCD le quadrilatère inscriptible : construisons le rectangle

$J_1J_2J_3J_4$ dont les sommets ont pour coordonnées $\pm\alpha$, $\pm\beta$, et soit T le point de coordonnées γ, δ.

Les quatre sommets A, B, C, D sont sur les droites TJ_1, TJ_2, TJ_3, TJ_4 et l'on a :

$$\frac{TA}{TJ_3}=\frac{TC}{TJ_1}=\frac{\delta\gamma}{\delta\gamma-\alpha\beta},$$
$$\frac{TB}{TJ_2}=\frac{TD}{VJ_4}=\frac{\delta\gamma}{\delta\gamma+\alpha\beta},$$

d'où

$$\frac{AT}{AJ_3}=\frac{CT}{CJ_1}=\frac{BT}{BJ_2}=\frac{DT}{DJ_4}=\frac{\delta\gamma}{\alpha\beta},$$

donc les diagonales du quadrilatère ABCD sont parallèles aux côtés du losange $E_1G_1E'G'$; on en déduit :

$$\frac{m}{J_1J_3}=\frac{\delta\gamma}{\delta\gamma-\alpha\beta},\qquad \frac{n}{J_2J_4}=\frac{\delta\gamma}{\delta\gamma+\alpha\beta},$$
$$mn=\frac{4\delta^2\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2},\qquad \frac{m}{n}=\frac{\delta\gamma+\alpha\beta}{\delta\gamma-\alpha\beta}.$$

On voit immédiatement sur la figure que la droite TL qui passe par le milieu M de SQ passe aussi par les milieux des diagonales AC, BD, et l'on vérifie que :

$$\frac{LH}{LK}=\frac{TH}{TK}.$$

Exercice proposé. — R et r étant les rayons de deux cercles intérieurs l'un à l'autre, de centres O et ω, et Δ la distance des centres, démontrer que si l'on a :

$$(R^2-\Delta^2)^2=2r^2(R^2+\Delta^2),$$

on peut inscrire dans le premier une infinité de quadrilatères ABCD circonscrits au second.

Le lieu des points S et Q est la polaire du point fixe I de rencontre des diagonales, qu'on déterminera par les relations :

$$\text{ou}\qquad \left\{\begin{aligned}\omega P&=\frac{R^2-\Delta^2}{2\Delta}\\ OP&=\frac{R^2+\Delta^2}{2\Delta}\end{aligned}\right.\qquad\text{et}\qquad PI=\frac{r^2}{\Delta},$$

d'ailleurs $S\omega Q$ est droit.

Les périmètres et les surfaces des quadrilatères sont proportionnels à f.

Le produit des diagonales est constant, égal à $\dfrac{8Rr^2}{R^2 - \Delta^2}$.

26. — *Problème. Calculer les côtés d'un quadrilatère inscriptible et circonscriptible, connaissant les trois diagonales* m, n, μ.

Posons :

$$a + c = 2x, \quad \text{d'où} \quad a = x + y,$$
$$a - c = 2y, \qquad b = x - z,$$
$$d + b = 2x, \qquad c = x - y,$$
$$d - b = 2z, \qquad d = x + z.$$

on trouvera les équations :

$$2x^2 - y^2 - z^2 = mn,$$
$$\frac{x^2 + yz}{x^2 - yz} = \frac{m}{n},$$
$$\frac{(x^4 - y^2z^2)\left[(x^2 - y^2)z^2 + (x^2 - z^2)y^2\right]}{16x^2y^2z^2} = \mu^2,$$

d'où

$$\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{x} = \frac{m - n}{m + n}.$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 = \frac{2\left(\dfrac{m - n}{mn}\right)^2\mu^2 + 2\left(\dfrac{m - n}{m + n}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{m - n}{mn}\right)^2\mu^2}.$$

Même problème. Autre solution. — On posera :

$$\frac{2\gamma\delta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\delta\gamma - \alpha\beta} = m, \qquad \frac{2\gamma\delta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\delta\gamma + \alpha\beta} = n,$$

$\sqrt{\gamma^2 + \delta^2} = \mu$, et $\dfrac{\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} = \dfrac{\delta\alpha}{\sqrt{\delta^2 + \alpha^2}}$ condition de circonscriptibilité.

Soit :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tg}\psi, \qquad \frac{\delta}{\gamma}\operatorname{tg}\varphi,$$

on aura :

$$(m + n)\operatorname{tg} 2\varphi = (m - n)\operatorname{tg} 2\psi,$$
$$\frac{\mu^4(m^2 - n^2)\operatorname{tg} 2\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi} = \frac{m^2n^2 \operatorname{tg} 2\psi}{1 + \operatorname{tg}^2 2\psi}\left(\theta\,\frac{m + n}{m - n}\right)^2,$$

d'où

$$\operatorname{tg} 2\psi = \sqrt{\frac{\left(\frac{mn}{m-n}\right)^4 - \mu^4}{\mu^4 - \left(\frac{m^2n^2}{m^2-n^2}\right)^2}}, \quad \text{et} \quad \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{mn}{m+n}.$$

on pourra donc déterminer tous les éléments de la construction.

27. — *Problème. Construire un quadrilètre inscriptible et circonscriptible, connaissant les quatre côtés, entre lesquels on a la relation :*

$$a + c = d + b, \quad \textit{ou l'équivalente} \quad \frac{\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}} = \frac{\alpha\delta}{\sqrt{\alpha^2+\delta^2}}.$$

On se servira des relations ci-dessous (n° 17)

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{a+c}{a-c}, \quad \frac{\delta}{\beta} = \frac{d+b}{d-b}.$$

Ces trois égalités donneront :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{bd}}{\sqrt{ac}}, \quad \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{a+c}{a-c}, \quad \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\sqrt{db}(d+b)}{\sqrt{ac}(d-b)}.$$

Cela étant, on prendra une longueur arbitraire pour α, et on construira β, γ, δ, ce qui fournira le moyen d'obtenir un quadrilatère semblable à celui que l'on cherche ; le reste est facile à saisir.

Autres exemples. — Déterminer les éléments d'un quadrilatère inscriptible et circonscriptible, connaissant R, m et le rayon r du cercle inscrit ; ou bien R, r et f, etc...

(*A suivre*).

EXERCICES SUR LES TRIANGLES PÉDALES

Par M. **Francesco Ferrari.**

Dans les relations citées plus loin, nous adopterons les notations suivantes :

M désigne un point quelconque du plan du triangle ABC, et α, β, γ ses coordonnées barycentriques par rapport à ABC ;

Δ représente l'aire de ce triangle ;

M_1, M_2, M_3 sont les points harmoniquement associés à M; leurs coordonnées sont, respectivement $(-\alpha,\beta,\gamma)$, $(\alpha,-\beta,\gamma)$, $(\alpha,\beta,-\gamma)$;
M', M'_1, M'_2, M'_3 représentent les points complémentaires, et M'', M''_1, M''_2, M''_3 les anticomplémentaires de M, M_1, M_2. M_3;
σ, σ_1, σ_2, σ_3 les sommes $\alpha+\beta+\gamma$, $-\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha-\beta+\gamma$, $\alpha+\beta-\gamma$;
$p(M)$,.... $ap(M)$,.... les aires (positives ou négatives (*) du triangle pédale et du triangle antipédale de M,....

1. — On trouve :

(I) $$p(M)+p(M_1)+p(M_2)+p(M_3)=0,$$

(II) $$\frac{1}{p(M)}+\frac{1}{p(M_1)}+\frac{1}{p(M_2)}+\frac{1}{p(M_3)}=\frac{4}{\Delta},$$

(III) $$ap(M)+ap(M_1)+ap(M_2)+ap(M_3)=0,$$

(IV) $$\frac{1}{ap(M)}+\frac{1}{ap(M_1)}+\frac{1}{ap(M_2)}+\frac{1}{ap(M_3)}=-\frac{2}{\Delta},$$

(V) $$\begin{cases} p(M)\,.\,ap(M')=\Delta^2,\\ ap(M)\,.\,p(M'')=\Delta^2,\end{cases}$$

(VI) $$ap(M')+ap(M'_1)+ap(M'_2)+ap(M'_3)=4\Delta,$$

(VII) $$\frac{1}{ap(M')}+\frac{1}{ap(M'_1)}\,\frac{1}{ap(M'_2)}+\frac{1}{ap(M'_3)}=0,$$

(VIII) $$p(M'')+p(M''_1)+p(M''_2)+p(M''_3)=-2\Delta,$$

(IX) $$\frac{1}{p(M'')}+\frac{1}{p(M''_1)}+\frac{1}{p(M''_2)}+\frac{1}{p(M''_3)}=0.$$

2. — Les sommes analogues relatives à $p(M')$, $\frac{1}{p(M')}$, $ap(M'')$, $\frac{1}{ap(M'')}$ ont des expressions compliquées. La plus simple est la

---

(*) L'aire d'un triangle ABC supposé placé sur un plan horizontal est positive ou négative, selon qu'une personne, qui, par hypothèse, parcourt le périmètre du triangle dans le sens ABC placé au-dessus du plan, a toujours la surface de ce triangle à sa gauche ou à sa droite.

Par l'expression *triangle pédale d'un point* M, par rapport au triangle ABC, on désigne le triangle A'B'C', dont les sommets A', B', C' sont, respectivement, les points où les droites AM, BM, CM rencontrent les côtés opposés BC, CA, AB du triangle ABC; et par *triangle antipédale d'un point* M, par rapport au triangle ABC, le triangle A"B"C", par rapport auquel ABC est le *triangle pédale de* M.

suivante :

$$(X)\quad \frac{1}{ap(M'')} + \frac{1}{ap(M''_1)} + \frac{1}{ap(M''_2)} + \frac{1}{ap(M''_3)} = -\frac{1}{\Delta}\left(7 + \frac{4\Sigma\alpha^4}{\sigma\sigma_1\sigma_2\sigma_3}\right).$$

En particulier, si M est le barycentre G de ABC, on a

$$\frac{1}{ap(G)} + \frac{1}{ap(G''_1)} + \frac{1}{ap(G''_2)} + \frac{1}{ap(G''_3)} = -\frac{11}{\Delta},$$

et si M est le centre I du cercle inscrit à ABC,

$$\frac{1}{ap(\nu)} + \frac{1}{ap(\nu_a)} + \frac{1}{ap(\nu_b)} + \frac{1}{ap(\nu_c)} = -\frac{1}{\Delta}\left(7 + \frac{\Sigma a^4}{4\Delta^2}\right).$$

3. — Des relations analogues existent entre les carrés et les produits deux à deux de ces mêmes triangles ; les plus simples sont :

$$(XI)\quad ap^2(M) + ap^2(M_1) + ap^2(M_2) + pp^2(M_3) = \frac{64\Delta^2\alpha_8\beta^2\gamma^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{(\sigma\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^2},$$

$$(XII)\quad \frac{1}{p(M_1)\cdot p(M_2)} + \frac{1}{p(M_2)\cdot p(M_3)} + \frac{1}{p(M_3)\cdot p(M_1)} = -\left[\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{2\alpha\beta\gamma\Delta}\right]^2,$$

$$(XIII)\quad p(M''_1)\cdot p(M''_2) + p(M''_2)\cdot p(M''_3) + p(M''_3)\cdot p(M''_1) = \frac{\Delta^2\sigma^3\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{16\alpha^2\beta^2\gamma^2},$$

$$(XIV)\quad \frac{1}{p^2(M'')} + \frac{1}{p^2(M''_1)} + \frac{1}{p^2(M''_2)} + \frac{1}{p^2(M''_3)} = \frac{64\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{\Delta^2(\sigma\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^2}.$$

$$(XV)\quad ap(M'_1)\cdot ap(M'_2) + ap(M'_2)\cdot ap(M'_3) + ap(M'_3) + ap(M'_1) = -\left[\frac{\Delta(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{2\alpha\beta\gamma}\right]^2,$$

$$(XVI)\quad \frac{1}{ap(M_1)\cdot ap(M_2)} + \frac{1}{ap(M_2)\cdot ap(M_3)} + \frac{1}{ap(M_3)\cdot ap(M_1)} = \frac{\sigma^3\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{16\Delta^2\alpha^2\beta^2\gamma^2}.$$

En particulier, si M est le point G, on a :

$$p(G''_1)\cdot p(G''_2) + p(G''_2)\cdot p(G''_3) + p(G''_3)\cdot p(G''_1) = \frac{27\Delta^2}{16},$$

$$\frac{1}{p^2(G)} + \frac{1}{p^2(G''_1)} + \frac{1}{p_2(G''_2)} + \frac{1}{p^2(G''_3)} = \frac{64}{3\Delta^2};$$

et, si M est au point I,

$$ap^2(\mathrm{I}) + ap^2(\mathrm{I}_1) + ap^2(\mathrm{I}_2) + ap^2(\mathrm{I}_3) = \frac{a^2b^2c^2(a^2b^2c^2)}{4\Delta^2},$$

$$\frac{1}{p(\mathrm{I}_1)\cdot p(\mathrm{I}_2)} + \frac{1}{p(\mathrm{I}_2)\cdot p(\mathrm{I}_3)} + \frac{1}{p(\mathrm{I}_3)\cdot p(\mathrm{I}_1)} = -\left(\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2abc\Delta}\right)^2$$

$$p(\nu_a)\cdot p(\nu_b) + p(\nu_b)\cdot p(\nu_c) + p(\nu_c)\cdot p(\nu_a)(^*) = \frac{\Delta^4(a+b+c)^2}{a^2b^2c^2} = \left(\frac{\Delta^2}{2\mathrm{R}r}\right)$$

$$p^2(\nu) + p^2(\nu_a) + p^2(\nu_b) + p^2(\nu_c) = \frac{a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)}{4\Delta^6},$$

$$ap(\mathrm{I}'_1)\cdot ap(\mathrm{I}'_2) + ap(\mathrm{I}'_2) + ap(\mathrm{I}'_3) + ap(\mathrm{I}'_3)\cdot ap(\mathrm{I}'_1)$$
$$= -\left(\frac{\Delta(a-b)(b-c)(c-a)}{2abc}\right)^2,$$

$$\frac{1}{ap(\mathrm{I}_1).ap(\mathrm{I}_2)} + \frac{1}{ap(\mathrm{I}_2).ap(\mathrm{I}_3)} + \frac{1}{ap(\mathrm{I}_3).ap(\mathrm{I}_1)} = \frac{(a+b+c)^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{(2\mathrm{R}r)^2}.$$

4. — Les relations (VI), (VII), (VIII), (IX), (XIV), (XV), (XVI) dérivent immédiatement de (II), (I), (IV), (III), (XI), (XII), (XIII) à l'aide de V. Les autres se déduisent des formules connues par des calculs qui n'offrent d'autres difficultés que certaines longueurs,

$$p(\mathrm{M}) = \frac{2\alpha\beta\gamma\Delta}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)},\quad ap(\mathrm{M}) = \frac{4\alpha\beta\gamma\Delta}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}.$$

SUR LES FIGURES SEMBLABLES

Par F. J.

A diverses reprises, le *Journal de Mathématiques Élémentaires et Spéciales* a traité du déplacement des figures égales et des figures semblables (**), mais il y a lieu, croyons-nous, de signaler diverses propriétés de ces figures.

(*) ν, ν_a, ν_b, ν_c désignent les points du groupe de Nagel. (Voyez, Rouché, *Géom.* p. 468).

(**) 1891. J. M. S. Page 193. *Sur les centres de similitude*, par A. Poulain. — 1894. J. M. E. Page 3. *Sur les centres de rotation*, par A. Poulain. — Page 196. *Piège cinématique*, par G. Tarry. — Page 241. *Note sur les figures semblables*, par Dorlet. — 1895. J. M. S. Pages 12 et 159. *Sur les figures semblables*, par F. J. — J. M. E. Page 79. *Sur le déplacement des figures semblables*, par G. Tarry. Page 101. *Sur les axes de rotation*, par G. Tarry. — Page 195. *Détermination du centre de similitude de deux figures directement semblables*, par F. J. — 1896. J. M. E. Pages 191 et 192. *Questions* 753, 754, 755, par G. Tarry.

FIGURES DIRECTEMENT SEMBLABLES

Théorème. — Lorsqu'on a deux figures directement semblables dans un même plan, et qu'on divise dans le même rapport en A_2, B_2, C_2..., les droites AA_1, BB_1, CC_1, etc., qui joignent deux à deux les points homologues, on obtient une figure $A_2B_2C_2$... semblable aux deux premières (*).

On peut dire : *Deux figures directement semblables, situées dans un même plan, peuvent être considérées comme étant deux positions d'une même figure mobile, qui varie de grandeur, mais en restant semblable à elle-même, pendant que chacun de ses points décrit une trajectoire rectiligne* (**).

Les figures planes homothétiques ne sont qu'un cas particulier de la question précédente.

Théorème. — Si trois couples de points homologues A,A_1, B,B_1, C,C_1 de deux figures directement semblables à trois dimensions F,F_1 sont dans un même plan P, on peut considérer les deux figures données comme étant deux positions d'une même figure mobile, qui varie de grandeur, mais en restant semblable à elle-même, pendant que chacun de ses points contenus dans le plan P, décrit une droite sur ce plan, tandis que tout point extérieur, D par exemple, décrit un arc d'hyperbole DD_1 dont le plan est perpendiculaire au plan P, et dont la projection dd_1 est l'axe non transverse de la courbe.

FIGURES INVERSEMENT SEMBLABLES

Lorsqu'on projette sur une parallèle aux bissectrices intérieures, les points homologues de deux figures inversement semblables, on obtient deux ponctuelles (***) directement semblables ; tandis

(*) Le théorème est connu : les N. A. M. viennent de le rappeler, 1896, page 369.

(**) Nous ne considérons pas de la *Spirale logarithmique* considérée comme trajectoire de chaque point, puisque nous en avons parlé ailleurs : (J. M. S. 1895 ; pages 12 et 159).

(***) *Ponctuelle* est employé dans le sens indiqué par CREMONA, dans sa *Géométrie projective*.

Deux ponctuelles directement ou inversement semblables, sur une même droite, admettent un *point double*.

que sur une parallèle aux bissectrices extérieures, on a deux ponctuelles inversement semblables.

Théorème. — 1° Le lieu des points qui divisent les droites de jonction des couples de points homologues de deux figures inversement semblables, en segments additifs dans le rapport de similitude, est une droite parallèle aux bissectrices des angles formés par les côtés homologues.

Cette droite peut être nommée : *Droite des divisions proportionnelles intérieures.*

2° Deux figures inversement semblables, situées dans un même plan, admettent aussi une *droite des divisions proportionnelles extérieures.*

3° Les deux droites des divisions proportionnelles sont orthogonales ; leur point de concours est le *point double* des deux figures inversement semblables.

4° *Cas particulier.* — Deux figures inversement égales n'admettent à distance finie, qu'une seule droite des divisions proportionnelles : c'est la droite intérieure ; on peut la nommer *droite des milieux* (*).

La droite extérieure passe à l'infini et il en est de même du point double.

5° *Application à deux circonférences situées dans un même plan.*

On sait que le lieu des points dont les distances δ et δ' aux centres O et O′, sont dans le rapport des rayons r et r', est le cercle qui a pour diamètre le segment IE déterminé par le centre intérieur I d'homothétie et par le centre extérieur E ; or, le cercle IE est le lieu des points doubles des circonférences O et O′, considérées comme *directement* ou comme *inversement* semblables (**), car les deux droites orthogonales des divisions proportionnelles (3) passent respectivement par les centres d'homothétie I, E.

(*) L'appellation *droite des milieux* est due à Chasles, dans le cas de deux ponctuelles égales, sur deux droites différentes ; il convient de garder ce même nom, dans le cas plus général de deux figures inversement égales.

(**) La première partie de la proposition, pour *directement* semblables, est bien connue : mais il n'en est pas de même, croyons-nous, de la seconde.

FIGURES PLANES SEMBLABLES, NON SITUÉES DANS UN MÊME PLAN

L'étude de deux figures planes semblables situées dans des plans parallèles, se ramène facilement à celle de deux figures semblables situées dans le même plan.

Théorème. — 1° Lorsque les figures sont directement semblables, et qu'on joint deux à deux les couples A, A_1 ; B, B_1 ; C, C_1... des points homologues, tout plan parallèle aux plans donnés, détermine une figure $A_2B_2C_2$... directement semblable aux proposées (*).

2° Le lieu des points A_2, B_2, C_2... qui divisent AA_1, BB_1, CC_1... dans le rapport de similitude de deux figures ABC..., $A_1B_1C_1$ inversement semblables, situées dans des plans parallèles, est une droite, soit que les segments soient additifs ou soustractifs. Les deux droites sont orthogonales.

3° Deux figures semblables ABC..., $A_1B_1C_1$... situés dans deux plans concourants P et P_1 participent à la fois, aux propriétés des figures d'un même plan, *directement* et *inversement* semblables; ainsi :

Les points A_2, B_2, C_2... qui divisent AA_1, BB_1, CC_1... en segments additifs dans le rapport de similitude, sont dans un même plan Q ; en projetant A_2, B_2... sur les plans P et P_1 par des droites parallèles à l'une des bissectrices de l'angle plan qui mesure le dièdre PP_1, on obtient des projections directement semblables aux figures données.

De même pour les points qui divisent AA_1, BB_1... en segments soustractifs.

Soit R le plan qui contient les points de division; les traces q, r des plans Q et R sur P sont orthogonales entre elles ; il en est de même des traces q_1 et r_1, sur P_1. Les plans Q et R se coupent suivant une droite parallèle aux projetantes qui donnent des figures directement semblables abc et $A_1B_1C_1$.

Pour démontrer cet intéressant théorème, il suffit de projeter ABC... sur le plan P_1, à l'aide de parallèles aux bissectrices b et b' de l'angle plan qui mesure le dièdre PP_1.

(*) Question connue; voir N. A. M., 1896, page 369.

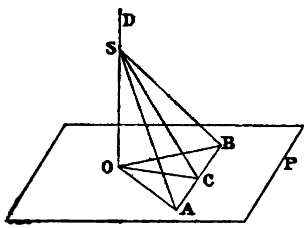
L'une des projections *abc*... par exemple, est directement semblable à $A_1B_1C_1$..., tandis que l'autre projection *a'b'c'*... est inversement semblable à la même figure $A_1B_1C_1$... Remarque analogue pour les projections de $A_1B_1C_1$... sur le plan P.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Dubouis**, professeur au collège de Barcelonnette

Théorème. — Si une droite est perpendiculaire à deux droites tracées par son pied dans un plan, elle est perpendiculaire à toute autre droite tracée par son pied dans le même plan.

Soient O le pied de la droite OD et OA, OB deux droites du plan, perpendiculaires à OD. Soit OC une troisième droite menée par O dans le plan.



Coupons OA, OB et OC par une transversale ABC. Il suffit de montrer que, si S est un point quelconque de OD, la longueur CS ne peut pas être égale à CO.

En effet, s'il en était ainsi, les deux triangles ACS et ACO dans lesquels on aurait

$$CS = CO \qquad AC = AC \qquad AS > AO,$$

donneraient :

$$ACS > ACO.$$

Pour la même raison on aurait

$$BCS > BCO.$$

Donc

$$ACS + BCS > ACO + BCO,$$

inégalité visiblement impossible.

NOTICE HISTORIQUE
SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir 1897, page 138)

G. DE SAINT-VINCENT

Bien que dans ses démonstrations, Grégoire de Saint-Vincent emploie la méthode d'exhaustion, il peut être considéré comme un de ceux qui ont le plus contribué au progrès de la méthode des indivisibles, et même comme un de ses promoteurs. Si son célèbre *Opus geometricum* n'a été publié qu'en 1647, les théorèmes qu'il contient avaient été divulgués en partie dans les leçons qu'il professait à Rome, à Prague et en Belgique depuis plus de vingt-cinq ans. Ses découvertes, plus encore que celles de Cavalieri, procèdent du théorème de Kepler et de la méthode de transformations de figures.

Dans le septième livre de son ouvrage, l'auteur développe une méthode très féconde de cubature, qu'il appelle *Ductus plani in planum* ; et dans le neuvième, il applique cette méthode à la mesure de différents solides, entre autres à celle des *onglets*, qui n'avait pas encore été donnée.

OPUS GEOM. — LIB. VII

Définition. — Soient deux figures planes A, B, de même hauteur (*fig.* 41). Menons à égale hauteur les droites GH, KL, puis relevons GH en K perpendiculairement au plan de B et achevons le rectangle dont ces deux droites ainsi placées sont deux côtés adjacents. En répétant cette construction pour toutes les droites de A et de B parallèles à la base, nous obtiendrons un certain solide. Ainsi si A est un cercle et B un rectangle, le solide obtenu sera un cylindre.

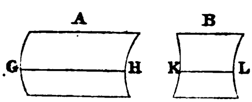


Fig. 41

On désignera cette opération par l'expression A *ductum in* B ou GH *ductum in* KL.

Si les deux figures sont identiques, on dira A *ductum in se* (*).

Le plus souvent, comme dans la (*fig.* 42), les deux surfaces sont terminées par une droite perpendiculaire aux bases, comme AB : on relève alors l'une des deux figures, comme on fait en géométrie descriptive, la droite AB faisant l'office de ligne de terre.

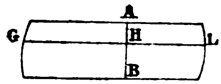


Fig. 42

I. — *Le carré ductum in se produit un cube* (*fig.* 43).

II. — *Si l'un de ces carrés est remplacé par un triangle rectangle, le résultat est un prisme triangulaire* (*fig.* 44).

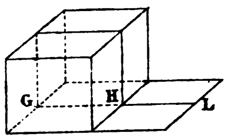


Fig. 43

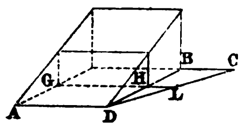


Fig. 44

III. IV. V. — *Le triangle rectangle ductum in se produit une pyramide à base carrée* (*fig.* 45). *Si l'un des triangles est retourné* (*fig.* 46) *on obtient une pyramide triangulaire qui est la moitié de la première.*

XVI à XXVII. — Etude des corps produits par le cercle (*fig.* 47)

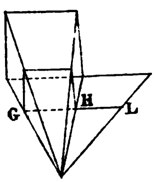


Fig. 45

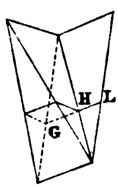


Fig. 46

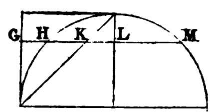


Fig. 47

HL *ductum in se*, GH *in se*, GH *in* GL, GH *in* HL, HM *in se*, GK *in* HM.

(*) G. de Saint-Vincent lui-même et Pascal ont remplacé *ductum in* par *multiplié par;* Quetelet le traduit par *projeté sur* ; M. Max. Marie a créé l'expression *duit sur.* Aucun de ces mots n'est exact ou complet, il faudrait une expression qui pût se rendre par *redressé et promené sur,* comme *ductérigé,* mais nous avons reculé devant ce néologisme dans un travail historique.

XL. — *Considérons la surface comprise entre une courbe quelconque* DB, *concave ou convexe, et un angle droit donné* A *ou* C (*fig.* 48) : *on peut toujours lui inscrire une série de rectangles dont la surface en diffère moins que d'une quantité donnée quelconque* α. Divisons AB en un certain nombre de parties égales telles que le rectangle KC soit plus petit que α et menons par les points de division des parallèles, qui rencontrent la courbe en G, F, E,.... : le problème sera résolu. En effet, la somme des rectangles OL, PR, QS,... KT est égale au rectangle KC, et par conséquent plus petite que α. Or, cette somme est elle-même supérieure à celle des triangles mixtilignes DOG, GPF,... donc *a fortiori* le triangle mixtiligne DBA diffère de la surface OGPFQEK de moins que α. De même le triangle mixtiligne DBC diffère de la surface LGRFSETC de moins que α.

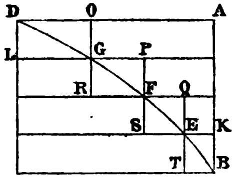


Fig. 48

XLVI. — *Soient quatre surfaces planes d'égales hauteurs* AB (*fig.* 49). *Si pour une transversale perpendiculaire quelconque* GL, *on a* $\frac{GI}{KI} = \frac{IL}{HI}$, *le solide provenant de* GI *ductum in* HI *est égal à celui de* KI *ductum in* IL. Ce théorème est un corollaire de celui que nous avons désigné sous le nom de Kepler. L'auteur le démontre explicitement comme nous l'indiquons par les théorèmes d'Archimède et d'Eudoxe (*).

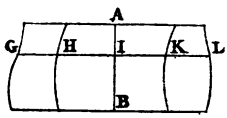


Fig. 49

XLVII. — *Par les extrémités du diamètre* AB (*fig.* 50) *menons les tangentes* AC, BD *égales à ce même diamètre, et tirons* BC, AD, *on aura*

demi-cercle *ductum in se* = *tri.* ACB *ductum in tri* ABD

On a en effet

$$GI.IK = BI.IA = IH^2.$$

(*) Il lui échappe dans cette démonstration le mot *infini*, mais il a soin de le traduire par l'expression *en nombre quelconque :* « ducantur infinitæ (hoc est quot cumque) æquidistantes,... »

Le premier solide est représenté (*fig.* 51). Il est égal, d'après ce qui précède, à un tétraèdre facile à mesurer. Nous le retrouverons plus loin (*).

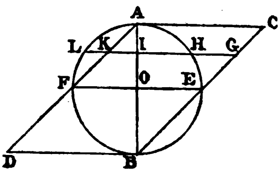


Fig. 50

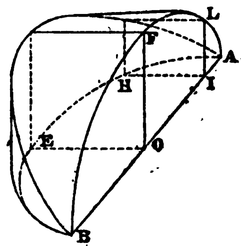


Fig. 51

XLVIII à LXX. — Mesures d'autres corps déduits du cercle, et

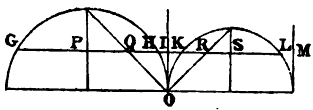


Fig. 52

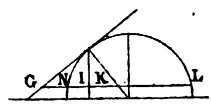


Fig. 53

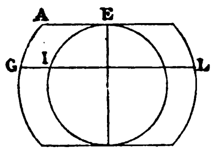


Fig. 54

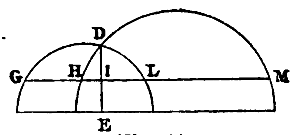


Fig. 55

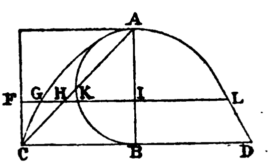


Fig. 56

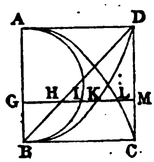


Fig. 57

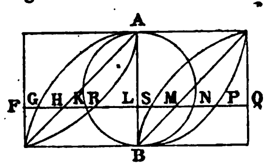
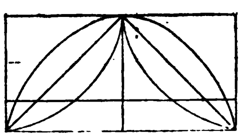
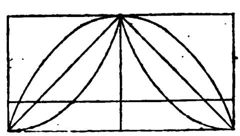


Fig. 58


Fig. 59


Fig. 60

(*) Il va sans dire que la tranche HI *ductum in se* comprise entre deux plans parallèles quelconques est égale à la tranche correspondante du tétraèdre. Cette remarque s'applique à tout ce qui suit.

indiqués par les relations suivantes :

(*fig*.52) $IG.IH = IK.IL = \overline{IR}^2$, $PQ.HK = \overline{QR}^2$, $\overline{IR}^2 + \overline{IK}^2 = IK.IM$

(*fig*.53) $\overline{GK}^2 = GH.GL$, $GI.IK = HI.IL$

(*fig*. 54) $GI.IL = \overline{AE}^2$

(*fig*. 55) $HI.IM = GI.IL$, $HL.LM = GH.IL$, $GH.HL = HI.DE$

LXX à CLXVIII. — Même chose pour le segment de parabole dont la flèche est égale à la demi-corde

(*fig*.56) $GH.HL = KI^2$, $GI^2 = HI^2 + KI^2$, et autres semblables

(*fig*.57) $GI.GK = GH.GL$, $GK.GL = GI.AB$, $GK.KL = HI.AB$

(*fig*.58) $GH.LM = KL.NP$, $KL.PQ = GL.MP$, $GK.LP = GL.MP$,

(*fig*.59,60) $GL.LP = KL.AB$, $FG.LP = GL.PQ$, $GP^2 = AB^2 + KL.AB$;

relations analogues.

Certaines de ces relations s'étendent à une parabole quelconque.

On a ainsi la mesure d'un grand nombre de nouveaux solides, parmi lesquels plusieurs sont remarquables (*).

(*A suivre*).

EXERCICES

Par M. Boutin

440. — *Trouver tous les nombres tels que leur carré plus leur cube soit un carré, et que le double de leur cube soit également un carré ?*

On doit avoir simultanément :

$$x^3 + x^2 = y^2, \qquad 2x^3 = z^2;$$

par suite $$x + 1 = K^2, \qquad x = 2p^2,$$

d'où $$2p^2 + 1 = K^2.$$

C'est l'équation de Pell, bien connue, qui donne :

$$p_0 = 0 \quad p_1 = 2 \quad p_2 = 12 \quad p_3 = 70 \quad \ldots . p_n = 6p_{n-1} - p_{n-2},$$

d'où

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 8, \quad x_2 = 288, \quad x_3 = 9\,800 \ldots .$$

$$x_n = 36x_{n-1} + x_{n-2} - 12\sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n-2}}.$$

(***) L'hyperbole fournirait la matière d'un grand nombre d'études du même genre.

441. — *On ne saurait trouver quatre entiers en progression arithmétique et tels que la somme de leurs quatrièmes puissances, soit une quatrième puissance* (*).

442. — *On ne saurait trouver : ni* 6, *ni* 9, *ni* 10, *ni* 11 *entiers consécutifs, tels que la somme de leurs quatrièmes puissances soit une quatrième puissance.*

443. — *On ne saurait trouver six entiers en progression arithmétique de raison* r (r *étant de la forme* : $2^\alpha 3^\beta$) *tels que la somme de leurs quatrièmes puissances soit une quatrième puissance.*

444. — *La somme des puissances* n^{es} *de dix entiers consécutifs quelconques est toujours terminée par* 5 ; *sauf si* $n = 4\mu$, *alors cette somme est terminée par* 3.

445. — *Les nombres étant écrits dans le système de base* p, (p *premier*) *la somme des puissances* n^{es} *de* p *nombres consécutifs est toujours terminée par zéro, sauf si* n *est de la forme* : $(p - 1)y$; *alors cette même somme est terminée par* $p - 1$.

Il suffit de démontrer le théorème pour les $p - 1$ premiers nombres et les $p - 1$ premières puissances, ce qui se fait aisément.

446. — *Le chiffre des dizaines de* 11^n, 13^n, 15^n, 17^n, 19^n, *est de la même parité que* n.

447. — *a étant un entier quelconque,*

$$a^n + a^{n+1} + a^{n+2} + a^{n+3},$$

est terminé par 0 *ou* 4, *suivant que* a *n'est pas ou est de la forme* $5m + 1$.

EXERCICES

Par M. **Bernès**

I. — Si β, γ sont les projections de B, C sur la bissectrice de l'angle A du triangle ABC, les parallèles à AB, AC menées par β, γ se coupent sur la symédiane issue de A. — Même propriété pour la bissectrice extérieure.

(*) Cet énoncé supprime la restriction de l'Exercice 309.

II. — Si, P étant un point quelconque du cercle ABC, les droites AP, BP, CP rencontrent BC, CA, AB en α, β, γ, que $\alpha\gamma$ rencontre AC en β', et que $\alpha\beta$ rencontre AB en γ'; la droite $\beta'\gamma'$ passe par le point de Lemoine.

III. — Sur le côté BC du triangle ABC on porte $CB_1 = a$ à la suite de BC, et $BC_1 = a$ à la suite de CB. Si AA_1 est la corde du cercle ABC parallèle à BC, que B_1A_1 rencontre AC en β et que C_1A_1 rencontre AB en γ, les deux points β, γ sont en ligne droite avec le milieu de BC et avec le point de Lemoine. Ces points β, γ sont aussi sur les parallèles à BC menées par les points où la médiatrice de BC rencontre AB, AC.

IV. — Sur la droite qui joint les milieux de AB, AC on prend un point quelconque M. Si les droites qui joignent B et C au point M′ isogonal de M rencontrent AC, AB en β, γ, la droite $\beta\gamma$ passe par le point de Lemoine.

V. — Si par le point de Lemoine du triangle ABC, on mène une parallèle à BC qui rencontre AB, AC en β, γ et que β', γ' soient les conjugués harmoniques de β, γ relativement à AB, AC, les deux droites $C\beta'$, $B\gamma'$ se coupent au point où la médiane, issue de A, rencontre le cercle ABC. Si L est ce point et que A′ soit la symétrique de A relativement à L, les droites $B\gamma$, $C\beta$ se coupent sur le cercle BCA′.

VI. — E, F étant deux points quelconques pris l'un sur le côté AC, l'autre sur le côté AB du triangle ABC, la droite menée par C qui divise BE dans le rapport $-\dfrac{a^2}{b.CE}$ et la droite menée par B qui divise CF dans le rapport $-\dfrac{a^2}{c.BF}$ se coupent au point de Lemoine. Noter le cas particulier à $CE = a$ et $BF = a$, et le cas particulier où $CE = \dfrac{a^2}{b}$, $BF = \dfrac{a^2}{c}$. (Les sens positifs de CE, BF sont CA, BA). (*A suivre*).

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

SUR LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite*, 1897, page 145)

CONIQUES BITANGENTES A DEUX CERCLES

60. — Il ne s'agit plus ici que des coniques pour lesquelles les deux cercles bitangents sont d'espèces différentes. Leurs centres appartiennent à la circonférence qui a pour diamètre la ligne des centres des deux cercles.

Pour l'une quelconque de ces coniques, le point d'intersection des deux droites des contacts est l'un des nœuds des deux cercles par rapport à leur axe radical, et les saillants se trouvent, avec l'autre nœud, sur une même perpendiculaire à la ligne des centres.

Soit Ω (*fig.* 35) le point de rencontre des droites des contacts de l'une des coniques avec les deux cercles. Ce point doit avoir la même polaire dans chaque cercle que dans la conique; il aura donc la même polaire dans les deux cercles. Ainsi, il se trouvera sur la droite qui joint leurs centres H, H'; de plus, Ω_1 étant l'intersection de cette droite avec la polaire commune, et r, r' désignant les deux rayons, on aura

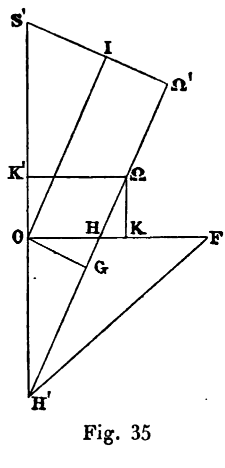


Fig. 35

$$(1)\quad H\Omega.H\Omega_1 = r^2, \qquad H'\Omega.H'\Omega_1 = r'^2.$$

D'après cela, la circonférence décrite sur $\Omega\Omega_1$ comme diamètre, couperait orthogonalement les deux cercles; le milieu de $\Omega\Omega_1$ appartient donc à leur axe radical, et leurs nœuds, par rapport à cet axe, sont Ω et Ω_1.

Quant aux saillants, chacun se trouve sur la polaire, par rapport à la conique, du point de rencontre Ω des droites des contacts; or, on vient de voir que cette polaire est la perpendiculaire élevée en Ω_1 sur HH'.

Il y a lieu de se demander si, pour toutes les coniques bitan-

gentes aux deux cercles, c'est le même nœud qui sert de point de concours aux droites des contacts, ou si ce point de concours se trouve, pour les unes en Ω, et, pour les autres, en Ω_1. Supposons les deux cercles extérieurs l'un à l'autre, et considérons deux coniques particulières formées, la première par une des tangentes extérieures aux deux cercles et une des tangentes intérieures, la seconde par la même tangente extérieure et l'autre tangente intérieure. Pour la première, le point de rencontre des droites des contacts sera en dedans de l'un des cercles; pour la seconde, il sera en dedans de l'autre cercle; les deux points ne sauraient donc coïncider. De là nous concluons qu'il y a bien deux groupes de coniques pour l'un desquels les droites des contacts partent du nœud Ω, tandis que, pour l'autre, elles partent du nœud Ω_1.

Dans les trois paragraphes suivants, nous n'envisagerons de chaque groupe que les coniques dont l'axe focal passe par le centre du même cercle, H par exemple; nous verrons ensuite comment elles se trouvent liées à celles dont l'axe focal passe par le centre de l'autre cercle.

61. — *Les coniques d'un même groupe sont semblables entre elles.*

Considérons une conique du groupe (Ω) dont l'axe focal soit OH (*fig.* 35); abaissons, sur OH, OH', les perpendiculaires ΩK, ΩK'. Par suite de la similitude des triangles OHH', HKΩ, H'K'Ω, les lignes H'Ω, HΩ, HH' sont proportionnelles aux lignes OK, HK, OH; celles-ci le sont à a^2, b^2, c^2 [**22**]; on a donc

$$(2) \qquad \frac{a^2}{H'\Omega} = \frac{b^2}{H\Omega} = \frac{c^2}{HH'},$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

Si l'on joint Ω à l'un des points de rencontre de deux coniques du groupe, on obtiendra une ligne qui sera bissectrice de l'angle formé par les droites des contacts de chaque cercle avec les deux coniques [**58**]. L'un des couples de sécantes communes à ces deux coniques sera donc orthogonal et aura son sommet en Ω.

Pour une conique du groupe (Ω_1) dont l'axe focal passerait aussi par H, on aurait

$$(3) \qquad \frac{a_1^2}{H'\Omega_1} = \frac{b_1^2}{H\Omega_1} = \frac{c_1^2}{HH'}.$$

Si l'on multiplie membre à membre les égalités (2) et (3), en ayant égard aux relations (1), il viendra

$$\frac{aa_1}{r'} = \frac{bb_1}{r} = \frac{cc_1}{d},$$

d désignant la distance des centres des deux cercles.

(*A suivre*).

NOTE SUR L'ARITHMÉTIQUE BINAIRE

Par M. **Ed. Collignon**, Inspecteur général des Ponts-et-Chaussées, en retraite.

(*Suite et fin*, v. 1897 ; p. 148).

PARTAGE DE LA CIRCONFÉRENCE

On sait inscrire dans le cercle, avec la règle et le compas, des polygones réguliers de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 17... côtés. On peut aussi combiner entre elles ces diverses divisions de la circonférence, de manière à réaliser d'autres divisions. C'est ainsi, par exemple que le pentédécagone se déduit de l'hexagone et du décagone par la relation

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}.$$

Proposons-nous de diviser la circonférence en soixante parties égales. On y parviendra en prenant le quart du quinzième. On peut aussi y arriver en combinant d'autres fractions de la circonférence entière. Décomposons 60 en deux facteurs premiers entre eux, 12×5, et posons

$$\frac{1}{60} = \frac{x}{5} + \frac{y}{12},$$

x et y représentant des nombres entiers. On en déduit

$$12x + 5y = 1,$$

équation dont la solution générale est, en appelant t un nombre entier quelconques positif ou négatif,

$$x = 5t - 2,$$
$$y = 5 - 12t.$$

Nous aurons la solution qui admet les moindres nombres en

valeur absolue en posant $t = 0$. Il viendra

$$x = -2, \quad y = 5,$$

et l'on a

$$\frac{1}{60} = \frac{5}{12} - \frac{2}{5}.$$

Mais on peut aussi décomposer 12 en deux facteurs premiers entre eux, $12 = 3 \times 4$, et poser,

$$\frac{5}{12} = \frac{z}{3} + \frac{u}{4}, \qquad \text{ou bien} \qquad 4z + 3u = 5.$$

On trouvera pour solution générale

$$z = 3t' - 1,$$
$$u = 3 - 4t',$$

et la solution la plus simple, pour $t' = 0$, est $z = -1$, $u = 3$, c'est-à-dire

$$\frac{5}{12} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3},$$

ce qui conduit à poser en définitive

$$\frac{1}{60} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} - \frac{2}{5}.$$

En partant de la décomposition de 60 en ses facteurs 15 et 4, puis en décomposant de même 15 en deux facteurs 3 et 5, on arriverait à une autre décomposition :

$$\frac{1}{60} = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}.$$

On obtiendra donc le côté du polygone régulier de 60 côtés en combinant par voie d'addition algébrique les arcs sous-tendus par les côtés du triangle équilatéral, du carré et du pentagone régulier.

La division de la circonférence en 60 parties égales est utile pour l'inscription des minutes sur le cadran d'une horloge. Examinons comment l'opération devrait être dirigée pour obtenir l'arc d'un degré, ou pour inscrire dans le cercle le polygone régulier de 360 côtés. On décomposera la fraction $\frac{1}{360}$ en fractions simples, ayant pour dénominateurs les facteurs de 360, premiers

entre eux deux à deux :

$$360 = 5 \times 8 \times 9,$$

et on trouvera par l'analyse indéterminée, en adoptant la plus simple solution,

$$\frac{1}{360} = \frac{3}{5} - \frac{3}{8} - \frac{2}{9}.$$

On sait diviser géométriquement la circonférence en cinq parties égales et en huit parties égales, mais on ne peut la diviser en neuf. On peut, il est vrai, la partager en trois, et il restera à subdiviser en trois parties égales l'arc sous-tendu par le côté du triangle équilatéral. Ici la solution peut être fournie par l'arithmétique binaire, en appliquant le développement

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots$$
$$= 0{,}01010101\dots;$$

ce complément de la solution est seul approximatif.

Soit proposé de partager une circonférence en parties proportionnelles à des nombres entiers donnés p, q, r,....

Soit $S = p + q + r + \dots$ la somme des nombres donnés. Le problème est ramené à partager la circonférence en S parties égales.

Si le nombre S rentre dans ceux pour lesquels le partage du cercle puisse se faire géométriquement, la question est immédiatement résolue. Supposons, par exemple, qu'on demande de partager le cercle en trois parties proportionnelles aux nombres 3, 4 et 5. La somme S est égale à 12, et il suffira d'inscrire dans le cercle le dodécagone régulier. La solution sera donnée par les arcs qui sont sous-tendus respectivement par les côtés du carré inscrit, du triangle équilatéral, et du dodécagone régulier étoilé.

Si S n'est pas le nombre de côtés d'un polygone régulier inscriptible, on pourra toujours trouver un multiplicateur entier x tel, que le produit Sx soit égal à $2^\mu - 1$, μ étant un exposant entier qui reste à déterminer. Puis on substituera à la fraction $\frac{1}{S}$ la fraction $\frac{x}{2^\mu - 1}$; elle conduit à un développement binaire, qu'on peut arrêter à un terme suffisamment petit, à titre d'approximation.

Prenons pour exemple le partage d'une circonférence en trois parties proportionnelles aux nombres 6, 7 et 8. La somme de ces nombres est $21 = 3 \times 7$. Pour trouver une puissance de 2 qui, divisée par 3 et par 7, laisse pour reste l'unité, il faut aller jusqu'à $2^6 = 64$; car 63 est divisible à la fois par 3 et par 7. Nous poserons donc

$$\frac{1}{21} = \frac{3}{2^6 - 1} = \frac{3 \times \frac{1}{2^6}}{1 - \frac{1}{2^6}} = 3\left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{18}} + \dots\right)$$

$$= 0{,}000\overline{1}0\overline{1}000\overline{1}0\overline{1}\dots\dots,$$

fraction qui montre comment doivent être dirigées les bissections. Voilà la méthode directe. Mais dans le cas particulier observons que les parties cherchées sont $\frac{6}{21}$, $\frac{7}{21}$, $\frac{8}{21}$, et que la seconde $\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$. Par conséquent, la seconde des parties cherchées est l'arc sous-tendu par le côté du triangle équilatéral. Cette partie est connue exactement d'avance. Il reste alors à partager proportionnellement aux nombres 6 et 8 les deux tiers de la circonférence. Ces nombres donnés sont proportionnels à 3 et 4, dont la somme est 7. Il suffit donc de diviser l'arc en sept parties égales, ce qui se fera par l'application du développement binaire

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \dots = 0{,}001001001\dots$$

prolongé autant qu'on le voudra.

RELATIONS MÉTRIQUES
ET TRIGONOMÉTRIQUES
ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES
DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **Lecocq**, ancien professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, 1897 ; p. 151).

28. — *Lieux geométriques.*

Si SLQT étant fixe, on fait varier α et β, β étant une fonction connue de α, les quatre sommets du rectangle $J_1J_2J_3J_4$ se déplace-

ront sur des courbes déterminées, et les quatre sommets du quadrilatère ABCD, sur des courbes corrélatives.

Du n° 17 on tirera :

Pour le point C

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha\beta = \frac{\delta\gamma xy}{(\gamma - x)(\delta - y)}, \\ &(\gamma - x)\beta - (\delta - y)\alpha = \gamma y - \delta x, \end{aligned}\right. \quad \text{d'où} \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{\delta x}{\delta - y}, \\ \beta &= \frac{\gamma y}{\gamma - x}; \end{aligned}$$

pour le point A

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha\beta = \frac{\delta\gamma xy}{(\gamma - x)(\delta - y)}, \\ &(\gamma - x)\beta - (\delta - y)\alpha = \delta x - \gamma y, \end{aligned}\right. \quad \text{d'où} \quad \begin{aligned} \alpha &= -\frac{\delta x}{\delta - y}, \\ \beta &= -\frac{\gamma y}{\gamma - x}; \end{aligned}$$

pour le point B

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha\beta = -\frac{\delta\gamma xy}{(\gamma - x)(\delta - y)}, \\ &(\gamma - x)\beta + (\delta - y)\alpha = \gamma y - \delta x, \end{aligned}\right. \quad \text{d'où} \quad \begin{aligned} \alpha &= -\frac{\delta x}{\delta - y}, \\ \beta &= \frac{\gamma y}{\gamma - x}; \end{aligned}$$

pour le point D

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha\beta = -\frac{\delta\gamma xy}{(\gamma - x)(\delta - y)}, \\ &(\gamma - x)\beta + (\delta - y)\alpha = \delta x - \gamma y, \end{aligned}\right. \quad \text{d'où} \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{\delta x}{\delta - y}, \\ \beta &= -\frac{\gamma y}{\gamma - x}; \end{aligned}$$

aux solutions conjointes qui donnent α et β en fonction de y et x, on ajoutera

$$\beta = \varphi(\alpha),$$

φ étant une fonction connue, et l'on aura immédiatement l'équation du lieu, savoir

$$\pm \frac{\gamma y}{\gamma - x} = \varphi\left(\pm \frac{\delta x}{\delta - y}\right).$$

Exemple : le point J_1 décrit la droite :

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} = 1,$$

les lieux décrits respectivement par C, A, B, D auront pour équa-

tions :

(C) $A\gamma y^2 + ABxy + B\delta x^2 - A\gamma(B+\delta)y - B\delta(A+\gamma)x + AB\delta\gamma = 0,$

(A) $A\gamma y^2 - ABxy + B\delta x^2 + A\gamma(B-\delta)y + B\delta(A-\gamma)x - AB\delta\gamma = 0,$

(B) $A\gamma y^2 + ABxy - B\delta x^2 - A\gamma(B+\delta)y - B\delta(A-\gamma)x + AB\delta\gamma = 0,$

(D) $A\gamma y^2 - ABxy - B\delta x^2 + A\gamma(B-\delta)y + B\delta(A+\gamma)x - AB\delta\gamma = 0.$

Autre exemple : si

$$\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2,$$

ρ étant une constante, les quatre points A, B, C, D parcourent les différents arcs d'une même courbe dont l'équation est

$$\frac{\delta^2 x^2}{(\delta - y)^2} + \frac{\gamma^2 y^2}{(\gamma - x)^2} = \rho^2,$$

c'est ce qui arrive en général pour toute fonction de α et β renfermant des puissances paires de ces coordonnées.

Nota. — On vérifiera que si l'un des sommets se trouve sur le cercle de centre O et de rayon R, les trois autres sommets sont sur le même cercle.

Récriproquement, si l'on donne la courbe parcourue par l'un des sommets du qudrilatère, on trouvera celle engendrée par l'un des points J.

Exemple. — Pour que C soit assujetti à parcourir la ligne droite

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1,$$

il faut que les coordonnées α, β du point J_1 satisfassent à l'équation $(AB - A\delta - B\gamma)\alpha\beta + A\delta\gamma\beta + B\delta\gamma\alpha - AB\delta\gamma = 0.$

Autre exemple : soit

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

on aura :

$$\gamma^2\alpha^2(\delta - \beta)^2 + \delta^2\beta^2(\gamma - \alpha)^2 = \rho^2(\delta\gamma - \alpha\beta)^2.$$

On peut de même trouver les lieux de points autres que les sommets et qui se rattachent au quadrilatère.

Par exemple les coordonnées du centre O étant :

$$x = \frac{\gamma\beta^2(\alpha^2 + \delta^2)}{\alpha^2\beta^2 - \delta^2\gamma^2}, \quad y = \frac{\delta\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2)}{\alpha^2\beta^2 - \delta^2\gamma^2},$$

on en déduit :

$$\alpha^2\beta^2 = \frac{\delta^2\gamma^2 xy}{(\delta - y)(\gamma - x)}, \quad \text{et} \quad \delta(\delta - y)\beta^2 - \gamma(\gamma - x)\alpha^2 = \delta\gamma(\gamma y - \delta x),$$

d'où

$$\alpha^2 = \frac{\delta\gamma y}{x - \gamma},$$

$$\beta^2 = \frac{\delta\gamma x}{y - \delta},$$

de sorte que si, par exemple, on donne :

$$\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2,$$

le lieu du point O sera représenté par

$$y^2 - \frac{\rho^2}{\delta\gamma} xy + x^2 + \frac{\rho^2 - \delta^2}{\delta} y + \frac{\rho^2 - \gamma^2}{\gamma} x - \rho^2 = 0.$$

Comme point rattaché au quadrilatère, on pourra choisir son centre de gravité dont les coordonnées sont :

$$y = - \frac{\beta^2\delta(3\alpha^2 + \gamma^2)}{3(\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2)},$$

$$x = - \frac{\alpha^2\gamma(3\beta^2 + \delta^2)}{3(\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2)}.$$

Remarque. — Enfin, le point T lui-même peut être mobile, et l'on trouvera de nombreux lieux géométriques, en variant les conditions disponibles.

Observation générale. — Les formules établies dans ce travail sont presque toutes calculables par logarithmes ; encore les autres, telles que celles de LA, LB, LC, LD (n° 14) n'exigent-elles qu'une légère transformation. On peut donc choisir facilement des exercices de calcul logarithmique dans le cours des pages qui précèdent. (*A suivre*).

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir 1897, page 162)

OPUS GEOM. — LIB. IX

On appelle *onglet* (ungula) le solide déjà remarqué par Kepler, et obtenu en coupant un cylindre par un plan passant par un diamètre du cercle de base.

V. — *Dans la base d'un demi-cylindre, inscrivons un triangle isoscèle ; dans les deux segments, deux triangles également isoscèles, et ainsi de suite. Le prisme ayant pour base le polyèdre ainsi formé différera du demi-cylindre aussi peu qu'on voudra.* Démonstration analogue à celle de la proposition II du livre XII d'Euclide.

VI. — *La même construction faite dans un onglet donnera lieu à la même conclusion.*

VII. — *Les volumes de deux onglets produits dans un même cylindre sont comme leurs hauteurs.* Supposons les deux onglets sur la même base : les prismes inscrits dans chacun de la manière indiquée plus haut (V et VI) seront dans la proportion indiquée. D'après le théorème d'Eudoxe, il en est de même à la limite des deux onglets, à cause de VI.

Remarque. — On a vu (lib. VII, prop. XLVII), que le solide représenté (*fig.* 61), et formé de deux onglets retranchés par des plans à 45° est égal au tétraèdre ayant pour base un demi-carré dont le côté est égal au diamètre, et la hauteur égale à ce même diamètre. L'onglet à 45° est donc égal à la moitié du même tétraèdre. Par conséquent, d'après VIII, *un onglet quelconque est égal au double du tétraèdre qui lui est inscrit.* Aussi, à présent, par le mot onglet, nous entendrons l'onglet à 45°, le volume de l'onglet quelconque s'y rapportant par une simple proportion.

XX. — *Le solide produit par le demi-cercle* ductum in se (*fig.* 61) *est à un autre semblable comme les cubes des diamètres. Conséquence de* VI *et du théorème d'Eudoxe.*

XXI. — *Coupons l'onglet* EDFd (*fig.* 61, 62) *par un plan* AB ab *perpendiculaire à la base et parallèle au diamètre* EF : *l'onglet est à la partie retranchée* DAadbB *comme* $\overline{OE}^3$ *à* $\overline{AC}^3$. *On a*

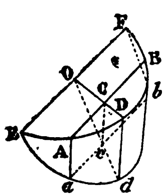


Fig. 61

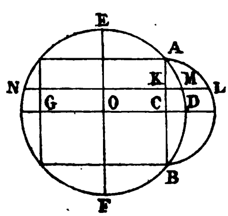


Fig. 62

$$KL^2 = KA.KB$$
$$= KM.KN = KM(2.OC + KM) = KM^2 + KM.GC,$$

donc le solide produit du cercle *ductum in se* égale celui du segment AMB *ductum in se* augmenté du cylindre ayant ce segment pour base et GC pour hauteur. Ou bien, en prenant moitié, l'onglet du demi-cercle ALB égale l'onglet du segment AMB plus le cylindre ayant ce segment pour base et OC pour hauteur.

De là la mesure de l'onglet *abd* formé sur un segment par un plan à 45°, et par suite de celui formé par un plan quelconque.

Corol. I. — *Si* BA *est le côté de l'hexagone, la partie de l'onglet retranchée par le plan* BAa *est double de celle retranchée par les plans* EAa, FB*b*. De plus, *le volume du solide restant est égal aux trois quarts de celui de l'onglet.*

Corol. II. — *L'onglet est égal à la moitié du cylindre ayant pour base la parabole inscrite dans le demi-cercle et une hauteur égale au rayon.*

XL. — *Considérons les arcs circulaires égaux* BP, PE, ED,.. DC (*fig.* 63), *et abaissons les ordonnées* PK,...CG ; *on a*

$$\text{PB.PK} + \text{PB(PK} + \text{EI)} + \text{PB(EI} + \text{DH)} + \text{PB(DH} + \text{CG)} = \text{AP.BG}.$$

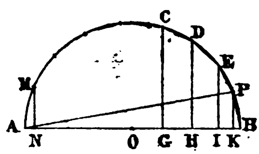


Fig. 63

En effet, d'après un théorème donné par Pappus pour la mesure de la sphère, soient les deux demi-cordes CG, DH (*fig.* 64) et le diamètre perpendiculaire OG ; menons le diamètre DK et la perpendiculaire CL à DH : les triangles CIL et CDK sont semblables et on a

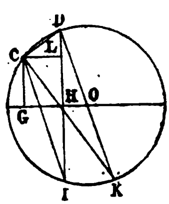


Fig. 64

$$\frac{\text{CD}}{\text{CK}} = \frac{\text{CL}}{\text{LI}}.$$

On voit que c'est le théorème XXII d'Archimède, démontré autrement.

(*A suivre*).

EXERCICES (*)

Par M. **Bernès**

VII. — Si D, D′ sont deux points quelconques pris sur BC dans le triangle ABC et qu'on divise AD dans le rapport $-\dfrac{b^2}{a.\mathrm{CD}}$ par une droite issue de C, et AD′ dans le rapport $-\dfrac{c^2}{a\mathrm{BD}'}$, par une droite issue de B, ces deux droites se rencontrent au point de Lemoine. Cas particulier où l'on prend $\mathrm{CD} = b$, $\mathrm{BD}' = c$; cas particulier où $\mathrm{BD}' = \dfrac{c^2}{a}$ et $\mathrm{CD} = \dfrac{b^2}{a}$. (Le sens BC est supposé le sens positif BD′ ; le sens CB est le sens positif de CD).

VIII. — Un point D étant donné sur le côté BC du triangle ABC, déterminer sur AC un point E et sur AB un point F tels que si α est la rencontre de BE, CF, β celle CF, AD, γ celle de AD, BE, les trois droites $\mathrm{A}\alpha$, $\mathrm{B}\beta$, $\mathrm{C}\gamma$ soient parallèles.

IX. — Le cercle décrit sur le côté BC du triangle ABC comme diamètre coupe AC, AB en $\mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1$ et M est le milieu du segment de la droite $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$ compris entre BC et la parallèle à BC menée par A. La droite isogonale de BM relativement à l'angle B coupe CA en β, et la droite isogonale de CM relativement à l'angle C coupe AB en γ. Démontrer que la droite $\beta\gamma$ passe par le point de Lemoine et par le centre O du cercle ABC.

X. — 1° La droite qui joint les pieds des symédianes issues de B et C, celle qui joint les pieds des hauteurs issues des mêmes points, et celle qui joint les points où les rayons BO, CO du cercle ABC coupent AC, AB sont concourantes.

2° Si M est le point de concours, les isogonales de BM, CM relativement aux angles B, C rencontrent AC, AB sur la droite d'Euler OH. Généraliser.

XI. — On considère un triangle ABC et la circonférence circonscrite. Un point D étant donné sur celle-ci, déterminer sur AB, AC deux points E, F tels que si α est la rencontre des circonférences ACE, ABF et β, γ les points où ces mêmes circonférences

(*) Voyez p. 167.

rencontrent AD, les deux circonférences ABβ, ACγ soient tangentes à Aα.

XII. — Dans un triangle ABC, les tangentes en A, B, C au cercle ABC rencontrent les côtés opposés en L, M, N; les parallèles à AL par B et C coupent AC, AB en λ, λ'; les parallèles à BM par C et A coupent BA, BC en μ, μ'; et les parallèles à CN par A et B coupent CB, CA en ν, ν'. Démontrer : 1° que les triangles Aλλ', Bμμ', Cνν' sont équivalents au triangle ABC, et aussi les triangles LCλ, LBλ', MAμ, MCμ', NBν, NAν'. 2° Que les droites μν', νλ', λμ' sont parallèles à la droite LMN et que leurs longueurs sont proportionnelles à a^2, b^2, c^2, les distances MN, NL, LM étant proportionnelles à $b^2 - c^2$, $c^2 - a^2$, $a^2 - b^2$. 3° Que les cercles Aμν', Bνλ', Cλμ' ont leurs centres ω, ω', ω'' respectivement sur les médiatrices de BC, CA, AB et que leurs rayons sont proportionnels à a, b, c. 4° Que le triangle αβγ formé par les intersections deux à deux des droites Aω, Bω', Cω'' (dans l'ordre habituel) est inversement semblable à ABC. 5° Que si D, E, F sont les intersections de μν', νλ', λμ' avec BC, CA, AB, les droites AD, BE, CF sont parallèles; et si S est le point de Steiner, ces droites sont isotomiques de AS, BS, CS relativement à BC, CA, AB.

XIII. — Dans un triangle ABC, on mène par A un couple quelconque de droites isogonales relativement à A, par B un couple quelconque de droites isogonales relativement à B, et par C de même un troisième couple. On coupe ces trois couples en α, α'; β, β'; γ, γ' par trois droites parallèles. Démontrer que les tangentes en A, B, C avec trois cercles Aαα', Bββ', Cγγ' rencontrent le cercle ABC au même point.

XIV. — Sur les côtés AB, AC d'un triangle ABC on suppose deux points E, F situés sur une parallèle à BC. Sur BF on prend deux points P, P' isotomiques relativement à BF et sur CE deux points Q, Q' isotomiques relativement à CE. Les droites CP, BQ se coupant en T, et les droites CP', BA' en T', démontrer que AT, AT' sont isotomiques sur BC.

XV. — E, F étant supposés quelconques sur AB, AC, on prend sur BF deux points P, P' et sur CE deux points Q, Q'. Les droites CP, BQ se coupant en T, et les droites CP', BQ' se coupant en T',

démontrer que la condition pour que AT, AT′ soient conjuguées harmoniques relativement à AB, AC et que les deux rapports anharmoniques (BFPP′), (CEQQ′) soient égaux et de signes contraires. Plus généralement on a : A,BCTT′ = (BFPP′) : (CEQQ′).

XVI. — Dans un triangle ABC, M étant la rencontre de la médiatrice de AB et de la perpendiculaire en C à AC, N celle de la médiatrice de AC et de la perpendiculaire en B à AB, démontrer : 1° que MN est perpendiculaire à la symédiane issue de A et passe aux $\frac{3}{4}$ de la corde interceptée sur cette symédiane par la circonférence ABC. 2° Les côtés MN, NA, AM du triangle AMN sont proportionnels aux médianes du triangle ABC, et le centre O du cercle ABC est le centre de gravité du triangle AMN. 3° Les points où BM est coupé par la médiatrice de AC et CN par celle de AB sont équidistants de BC. Expression de cette distance en fonction de a,b,c.

XVII.— 1° La droite qui joint l'orthocentre H d'un triangle ABC au milieu du côté BC est perpendiculaire à la droite AL conjuguée harmonique de AH relativement à AB, AC. 2° Si, R étant le rayon du cercle ABC, on porte sur AH dans le sens AH une longueur AF égale à $\frac{2R^2}{AH}$, la droite qui joint F au centre O du cercle ABC est perpendiculaire sur la conjuguée harmonique de AO relativement à AB, AC.

XVIII. — Sur les trois côtés d'un triangle ABC BC, CA, AB on suppose trois points l, m, n satisfaisant aux relations :

$$\begin{aligned} Cm.Bn &= AB.AC \\ An.Cl &= BC.BA \\ Bl.Am &= CA.CB \end{aligned}$$

où les longueurs sont considérées en grandeur et ligne.

1° Montrer qu'ils satisfont aussi aux relations

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{AC}{Am} + \frac{AB}{An} &= 1, \\ \frac{BA}{Bn} + \frac{Bl}{Bl} &= 1, \\ \frac{CB}{Cl} + \frac{CA}{Cm} &= 1, \end{aligned} \right.$$

et que l'un de ces points reste arbitraire.

2° Les droites Al, Bm, Cn sont concourantes, et quand l, m, n se déplacent, l'isogonal de ce point de concours parcourt la droite de Lemoine.

3° Les deux circonférences qui passent par l et sont tangentes l'une en B à BA, l'autre en C à CA ; celles qui passent par m et sont tangentes en C à CB, en A à AB ; celles qui passent par n et sont tangentes en A a Ac, en B à BC, se coupent en un même point P situé sur la circonférence ABC. Les distances de P aux trois sommets A, B, C sont données par BC.PA $=$ Am.PB $= -$ An.PC, ou encore $-$ Bl.PA $=$ CA.PB $=$ Bn.PC, ou Cl.PA $= -$ Cm.PB $=$ AB.PC, et la distance de P à l, m, n sont données par

$$\mathrm{P}l = \frac{\mathrm{PB.PC}}{\mathrm{PA}}, \ \mathrm{P}m = \frac{\mathrm{PC.PA}}{\mathrm{PB}}, \ \mathrm{P}n = \frac{\mathrm{PA.PB}}{\mathrm{PC}}.$$

Ces relations sont des équipollences, c'est-à-dire qu'elles expriment une propriété angulaire en même temps qu'une propriété métrique.

XIX. — Sur les trois côtés BC, CA, AB du triangle ABC on suppose trois points l_1, m_1, n_1 satisfaisant aux relations

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{A}m_1} + \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}n_1} = 3, \ \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{B}n_1} + \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{B}l_1} = 3, \ \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{C}l_1} + \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{C}m_1} = 3.$$

1° Montrer que l'un d'eux reste arbitraire, et qu'ils sont tous les trois sur une ligne droite qui passe par le centre de gravité G du triangle ABC.

2° Si $\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}$ désignent les valeurs des trois rapports $\frac{\mathrm{A}m_1}{\mathrm{A}n_1}$, $\frac{\mathrm{B}n_1}{\mathrm{C}l_1}$, $\frac{\mathrm{C}l_1}{\mathrm{C}m_1}$ dont le produit est égal à l'unité, on a

$$\frac{a.\mathrm{G}l_1}{\alpha} = \frac{b.\mathrm{G}m_1}{\beta} = \frac{c.\mathrm{G}n_1}{\gamma}.$$

3° Plus généralement, si par un point fixe Q(x_1, y_1, z_1) on trace une droite quelconque qui coupe BC, CA, AB en l_1, m_1, n_1, on a la relation

$$\frac{1}{a}\left(\frac{y_1}{\mathrm{A}n_1} - \frac{z_1}{\mathrm{A}m_1}\right) = \frac{1}{b}\left(\frac{z_1}{\mathrm{B}l_1} - \frac{x_1}{\mathrm{B}n_1}\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{x_1}{\mathrm{C}m_1} - \frac{y_1}{\mathrm{C}l_1}\right) = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1}{abc},$$

et

$$\frac{Ql_1}{\alpha x_1} = \frac{Qm_1}{\beta y_1} = \frac{Qn_1}{\gamma z_1}.$$

Dans ces relations BC, CA, AB représentent l'orientation positive des longueurs comptées sur ces droites, où α, β, γ ont la même signification.

XX. — L, M, N étant trois points en ligne droite situés sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC.

1° Les tangentes en A, B, C aux trois cercles AMN, BNL, CLM rencontrent le cercle ABC en un même point S. Et si les parallèles menées par A, B, C à la droite LMN rencontrent les côtés opposés en A_1, B_1, C_1, les distances SA, SB, SC sont inversement proportionnelles à $a.AA_1$, $b.BB_1$, $c.CC$.

2° Les trois cercles AMN, BNL, CLM coupent le cercle ABC en un même point P, et l'on a

$$\frac{a.PA}{MN} = \frac{b.PB}{NL} = \frac{c.PC}{LM}.$$

3° On a aussi les relations : PA.PL = PB.PM = PC.PN. Et ces relations sont des équipollences, c'est-à-dire qu'à la propriété métrique qu'elles expriment s'ajoute cette propriété angulaire : que les angles APL, BLM, CPN ont même bissectrice.

Si la droite LMN est la droite de Lemoine, le point S est le point de Steiner ; et si LMN est la droite qui joint le point de Lemoine au centre du cercle ABC, le point S est le point de Tarry. Plus généralement, si deux positions de la droite LMN font un certain angle φ, l'arc du cercle ABC qui est compris entre les deux positions correspondantes de S est égal à 2φ.

XXI. — Par B et C, on fait passer un cercle ω qui coupe en D la droite de Lemoine du triangle ABC. AD coupe le cercle ω en E et le cercle ABC en L. Si M et N sont les points où les cercles ACE, ABE coupent respectivement AB, AC.

1° Les parallèles menées par M, N à AC, AB, se coupent sur BC, en un point P ;

2° Les cercles LBP, LCP sont tangents, le premier à AB, le second à AC ; et les cercles MBP, NCP sont tous les deux tangents au cercle ABC.

XXII. — Un cercle de rayon arbitraire ayant pour centre le sommet A du triangle ABC coupe BC en D, E. Les symétriques de D, E relativement à AB pour l'un, à AC pour l'autre sont D', E', et les droites CD', BE' rencontrent AB, AC en F, G. Démontrer que, le 4e sommet du parallélogramme construit sur AF, AG étant L, AL est la symédiane de ABC et que la polaire de L relativement au cercle passe par le centre O du cercle ABC.

XXIII. — O étant le centre du cercle circonscrit à ABC, et les perpendiculaires en O à AO, BO, CO rencontrant les trois symédianes de ABC en K, K', K'', démontrer que la somme algébrique des projections de AK, BK', CK'' sur une droite quelconque du plan est égale à zéro.

XXIV. — D, D', D'' étant trois points pris sur les côtés BC, CA, AB de ABC, démontrer que la condition pour que la somme algébrique des projections de AD, BD', CD'' sur une droite quelconque du plan soit égale à zéro est que D, D', D'' divisent respectivement BC, CA, AB suivant un même rapport.

XXV. — Les trois droites AD, BD', CD'' de la question précédente se coupant deux à deux en A_1, B_1, C_1 (dans l'ordre habituel), trouver la condition pour que AD, AD', AD'' soient proportionnels aux côtés B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 du triangle $A_1B_1C_1$. Maximum et minimum du rapport $\frac{B_1C_1}{AD}$.

XXVI. — A_1, B_1, C_1 étant définis comme dans la question précédente, trouver la condition pour que la somme des projections de AA_1, BB_1, CC_1 sur une droite quelconque du plan soit égale à 0.

XXVII. — Un point D étant donné sur BC en détermine deux autres D', D'' sur AC, AB par la condition que les trois aires AD'D'', BD''D, CDD' soient équivalentes et de même sens.

XXVIII. — Si l'on désigne par — K, — K', — K'' les trois rapports suivant lesquels les trois points D, D', D'' divisent respectivement BC, CB, AB et qu'on pose

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + K' + K'K'' = \theta, \\ 1 + K'' + K''K = \theta', \\ 1 + K + KK' = \theta'', \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} 1 + KK' + K^2K'K'' = t, \\ 1 + K'K'' + KK'^2K'' = t', \\ 1 + K''K + KK'K''^2 = t''. \end{array}\right.$$

Démontrer : 1° Que dans le triangle DD'D'' et dans le triangle

ABC le centre des distances proportionnelles des sommets affectés des coefficients $(1+K)\theta$, $(1+K')\theta'$, $(1+K'')\theta''$ est le même. 2° Si $A_1B_1C_1$ est le triangle formé par les intersections de AD, BD′, CD″ le centre des distances proportionnelles des sommets affectés des coefficients θt, $\theta' t'$, $\theta'' t''$ est le même pour $A_1B_1C_1$ que pour ABC. En particulier si $K = K' = K''$ le centre de gravité est le même dans les trois triangles ABC, DD′D″, $A_1B_1C_1$.

XXIX. — On considère un triangle ABC et le point A′ symétrique de A relativement au milieu de BC : 1° Le cercle $C(b)$ et le cercle ACA′ se coupent en β sur la symédiane issue de A′, le cercle $B(c)$ et le cercle ABA′ se coupent en γ sur la même symédiane. 2° β', γ' étant les intersections de $C(b)$, $B(c)$ avec la médiane, les quatre points β, γ, β', γ' sont sur une même circonférence qui a pour centre A′. 3° Si I est la rencontre de $C\beta$, $B\gamma$ et I′ celle de $C\beta'$, $B\gamma'$, les points I et I′ sont sur la circonférence BCA′ et $AI = AI'$. Les triangles $I\gamma\beta$, $I'\beta'\gamma'$ sont, l'un directement, l'autre inversement semblables à CAA′.

XXX. — Dans un triangle ABC, les perpendiculaires abaissées du milieu D de BC sur AB, AC rencontrent AB, AC en δ, δ' ; $D\delta$ rencontre la médiane BE en P et $D\delta'$ la médiane CF en Q : 1° α, α' étant les rencontres de AP, AQ avec BC, les droites $\delta\alpha$, $\delta'\alpha'$ passent par le symétrique A′ de A relativement à D. 2° La parallèle à AD menée par l'orthocentre et la droite PQ rencontrent BC en deux points qui sont conjugués harmoniques relativement à BC. 3° L'isotomique P′ de P relativement à BE est sur la médiatrice de AB, et l'isotomique Q′ de Q relativement à CF est sur la médiatrice de AC. 4° CP′, BQ′ se coupent sur le rayon AO du cercle ABC, et CP, CQ sur la droite isotomique de AO relativement à BC. 5° Si dans un triangle $A_1B_1C_1$ construit avec les trois médianes AD, BE, CF pour côtés, on considère les points P'_1, Q'_1 définis comme P′, Q′ et que O_1 soit le centre du cercle $A_1B_1C_1$, le rapport suivant lequel $C_1P'_1$, $B_1Q'_1$ divisent A_1O_1 est égal au rapport suivant lequel AO est divisé par CP′, BQ′.

(*A suivre*).

EXERCICES

Par M. **A. Boutin**

448. — *Dans la suite de Fibonacci, où* $u_0 = 0$, *les nombres :* u^4_{15n-2}, u^4_{15n-1}, u^4_{15n+1}, u^4_{15n+2}, *sont terminés par l'unité.*

449. — $A_1B_1C_1$ *étant le triangle podaire d'un point quelconque* M *du plan d'un triangle* ABC; *les droites de Newton des quadrilatères* MB_1C_1A, MA_1C_1B, MA_1B_1C, *sont trois droites concourantes.*

Ces droites concourent au centre M' du cercle circonscrit à $A_1B_1C_1$, M' est le milieu de MM_2 (M_2 inverse de M dans ABC). On peut remarquer que M et M' sont deux points inverses dans le triangle qui a pour sommet les centres des cercles circonscrits aux quadrilatères considérés.

450. — S_M *étant la droite de Simson relative à un point quelconque* M *de la circonférence circonscrite à un triangle* ABC, O *le centre de cette circonférence, si on mène par* O_9 (*centre du cercle des neuf points*) *une droite parallèle à* OM *et de même sens, elle rencontre en* M_1 *la circonférence des neuf points; soient enfin,* A_1, B_1, C_1 *les milieux des côtés de* ABC. *Les côtés de ce triangle* ABC *et* S_M *forment un quadrilatère dont la droite de Newton est* N_M. *Démontrer que :*

1° M_1 est sur S_M;

2° S_M et N_M sont rectangulaires;

3° N_M est la droite de Simson de M_1 par rapport au triangle $A_1B_1C_1$.

Il en résulte que si M décrit la circonférence circonscrite à ABC, N_M enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.

451. — *La droite harmoniquement associée à un point quelconque* M *du plan d'un triangle forme avec les côtés de ce triangle un quadrilatère complet; si* M *décrit une droite, la droite de Newton de ce quadrilatère pivote autour d'un point fixe.*

452. — *Les côtés d'un pentagone quelconque pris quatre à quatre de toutes les manières possibles forment cinq quadrilatères. Démontrer que les cinq droites de Newton correspondant à ces quadrilatères concourent en un même point.*

On pourrait appeler ce point : point de Newton du pentagone.

Si ABC est un triangle coupé par deux transversales quelconques dont les équations sont (en coordonnées barycentriques) :

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\beta_1} + \frac{\gamma}{\gamma_1} = 0,$$
$$\frac{\alpha}{\alpha_2} + \frac{\beta}{\beta_2} + \frac{\gamma}{\gamma_2} = 0,$$

les droites de Newton des quadrilatères formés par le triangle et chacune de ces transversales ont pour équations :

$$\Sigma\alpha(\beta_1 + \gamma_1 - \alpha_1) = 0, \quad \Sigma\alpha(\beta_2 + \gamma_2 - \alpha_2) = 0.$$

Ces droites se coupent au point :

$$\frac{\alpha}{\alpha_1(\beta_2-\gamma_2)-\alpha_2(\beta_1-\gamma_1)} = \frac{\beta}{\beta_1(\gamma_2-\alpha_2)-\beta_2(\gamma_1-\alpha_1)} = \frac{\gamma}{\gamma_1(\alpha_2-\beta_2)-\gamma_2(\alpha_1-\beta_1)}.$$

On constate aisément que les trois autres droites de Newton passent par ce point.

On en déduit que les côtés d'un hexagone quelconque pris quatre à quatre de toutes les manières possibles, forment quinze quadrilatères, dont les quinze droites de Newton concourent cinq par cinq en six points.

453. — *On joint un point* M *de la circonférence* Δ, *circonscrite* O *à un triangle* ABC, *aux trois sommets de ce triangle ; on mène les droites qui joignent respectivement les milieux des côtés de ce triangle aux milieux des droites* MA, MB, MC. *Démontrer que* :

1° *Ces trois droites concourent en un même point* M'.

2° *Le lieu géométrique de* M' *quand* M *décrit* Δ *est la circonférence des neuf points du triangle qui a pour sommets les milieux des côtés de* ABC.

3° *La droite qui joint* M' *au milieu de* OO_9 *est parallèle à* OM *et en est le quart.*

Prenons pour triangle de référence le triangle $A_1B_1C_1$ qui a pour sommets les milieux des côtés de ABC; soient en coordonnées barycentriques α_1, β_1, γ_1, les coordonnées de M. On a la relation :

$$\text{(1)} \qquad \frac{a^2}{\beta_1 + \gamma_1} + \frac{b^2}{\alpha_1 + \gamma_1} + \frac{c^2}{\alpha_1 + \beta_1} = 0,$$

l'équation d'une des trois droites considérées est :

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{2\beta_1 + \alpha_1 + \gamma_1}{2\gamma_1 + \alpha_1 + \beta_1},$$

les trois droites analogues se coupent donc au point :

$$\frac{\alpha}{2\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} = \frac{\beta}{2\beta_1 + \alpha_1 + \gamma_1} = \frac{\gamma}{2\gamma_1 + \alpha_1 + \beta_1},$$

d'où

(2) $$\frac{\alpha+\beta-\gamma}{\alpha_1+\beta_1}=\frac{\alpha+\gamma-\beta}{\alpha_1+\gamma_1}=\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\beta_1+\gamma_1}.$$

L'équation du lieu de M' s'obtient en éliminant : α_1, β_1, γ_1 entre (1) et (2), ce qui donne :

$$\sum\frac{a^2}{\beta+\gamma-\alpha}=0,$$

cercle des neuf points de $A_1B_1C_1$.

Le 3° se vérifie aisément.

On peut généraliser par projection.

454. — *Si une droite passe par un point fixe, la droite de Newton du quadrilatère formé par cette droite et un triangle* ABC, *enveloppe une conique inscrite dans le triangle qui a pour sommets les milieux des côtés de* ABC.

α_1, β_1, γ_1 étant les coordonnées barycentriques du point fixe, on trouve pour équation de l'enveloppe :

$$\sqrt{\alpha_1(\beta+\gamma-\alpha)}+\sqrt{\beta_1(\alpha-\beta+\gamma)}+\sqrt{\gamma_1(\alpha+\beta-\gamma)}=0.$$

455. — d *et* d' *étant les distances de deux points fixes à une droite* Δ, *si on établit entre* d *et* d' *une relation linéaire, telle que :*

$$\mathrm{Ad}+\mathrm{Bd}'=\mathrm{C},$$

la droite Δ *enveloppe une circonférence dont le centre est sur la ligne qui joint les points fixes.*

Soient pour axes, la droite des points fixes, et une perpendiculaire en son milieu, $2a$ étant la distance de ces points ; on a les relations :

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p,$$
$$\mathrm{A}(p-a\cos\alpha)+\mathrm{B}(p+a\cos\alpha)=\mathrm{C},$$

d'où pour équation de l'enveloppe :

$$y^2+\left(x-a\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}\right)^2=\frac{\mathrm{C}^2}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2}.$$

456. — $\mathrm{d_a}, \mathrm{d_b}, \mathrm{d_c}$, *étant les distances des sommets d'un triangle à une tangente quelconque au cercle circonscrit, démontrer la relation :*

$$\mathrm{a}\sqrt{\mathrm{d_a}}+\mathrm{b}\sqrt{\mathrm{d_b}}+\mathrm{c}\sqrt{\mathrm{d_c}}=0.$$

457. — *Les distances* d *et* d' *de deux points fixes* F, F', *à une droite étant liées par la relation :*

$$\mathrm{Ad}^2+\mathrm{Bd}'^2+\mathrm{Cdd}'=\mathrm{k}^2,$$

démontrer que cette droite enveloppe une conique dont un des axes est dirigé suivant FF′.

Si $C = 0$, $A = B = 1$, que $2a^2$ soit la constante et $2c$ la distance des points fixes, on peut dire :

L'enveloppe des droites telles que la somme des carrés de leurs distances à deux points fixes est constante est un ellipse (ou une hyperbole) dont l'axe focal est perpendiculaire au milieu de la droite FF′, $2c$ *est la distance des foyers.*

458. — *On considère un faisceau de* $2n + 1$ *droites :* Δ_1, Δ_2,... Δ_{2n+1}, *concourantes en un même poiut* H, *et numérotées dans l'ordre où on les rencontre dans un même sens de rotation. D'un point quelconque* A_1 *de* Δ_1 *on abaisse sur* Δ_2 *une perpendiculaire qui rencontre* Δ_3 *en* A_3, *de* A_3 *on abaisse une perpendiculaire sur* Δ_4 *qui rencontre* Δ_5 *en* A_5, *de* A_5 *sur* Δ_6 *une perpendiculaire rencontrant* Δ_7 *en* A_7, *etc. Démontrer que le contour polygonal ainsi formé se ferme de lui-même et constitue un polygone convexe de* $2n + 1$ *côtés.*

Au moyen de A_1 H, et des angles successifs que les droites Δ forment entre elles, on calcule aisément tous les éléments de ce polygone.

459. — *Soient* M, M_2, *deux points inverses dans le triangle* ABC ; *on a :*

$$MA.\sin BMC = M_2A.\sin BM_2C = f(a, b, c).$$

A un facteur constant près, si M et M_2 désignent :

O et H, $f(a, b, c) = \sin 2A$,

K et G, $f(a, b, c) = m^2$, (m, médiane relative à a)

I, $f(a, b, c) = \cot g \frac{A}{2}$,

V et V_2, $f(a, b, c) = \frac{\cos (A - 30^\circ)}{a}$,

Ω et Ω' (points de Brocard), $f(a, b, c) = \frac{1}{a^2}$.

460. — V_2 *étant le premier centre isogone d'un triangle* ABC, *démontrer que si par* O_9, *on mène des parallèles à* AV_2, BV_2, CV_2, *ces droites sont les tangentes aux points de rebroussement de l'hypocycloïde, enveloppe des droites de Simson.*

Les points A_1, B_1, C_1 du cercle circonscrit qui ont pour droite de Simson ces tangentes de rebroussement, sont tels que OA_1, OB_1, OC_1, sont respectivement parallèles à AV_2, BV_2, CV_2.

461. — *Soient* a_1, b_1, c_1, *les pieds des bissectrices intérieures d'un triangle* ABC ; *on projette* a_1 *respectivement en* B_1 *et* C_1, *respectivement sur* AB *et* AC ; *les droites analogues à* B_1C_1 *déterminent le triangle* A'B'C'. — *Démontrer que* :

1° *Les triangles* ABC, A'B'C' *sont homologiques* ;

2° P *étant le centre d'homologie, l'inverse* P_2 *de* P *dans le triangle* ABC *est situé sur* OI, *et partage cette distance dans le rapport* :

$$\frac{P_2I}{P_2O} = \frac{2r}{R};$$

3° α_1, β_1, γ_1 *étant les projections de* I *sur les côtés de* ABC, *les droites* $A'\alpha_1$, $B'\beta_1$, $C'\gamma_1$, *concourent en un point* M, *situé sur* PI.

On trouve en coordonnées normales pour équation de B_1C_1 :

$$-x(1 + \cos A) + y \cos B + z \cos C = 0,$$

d'où pour équation de AA' :

$$-y(1 + 2 \cos B) + z(1 + 2 \cos C) = 0.$$

Les droites telles que AA', concourent donc au point :

$$(P) \qquad x(1 + 2 \cos A) = y (1 + 2 \cos B) = z (1 + 2 \cos C).$$

L'équation de $A'\alpha_1$ est :

$$x \cos A(\cos C - \cos B) - y(1 + \cos B)(1 + \cos B + \cos C)$$
$$+ z(1 + \cos C)(1 + \cos B + \cos C) = 0.$$

Les droites analogues concourent donc au point M, dont les coordonnées normales sont :

$$x : y : z = (1 + \cos B + \cos C)(1 + \cos A + \cos B + \cos C + 2 \cos B \cos C) : \ldots..$$

462. — *Un triangle équilatéral* A'B'C' *se déplace en restant inscrit dans un cercle fixe* ; P *est un point fixe quelconque du plan. Les droites* PA', PB', PC', *rencontrent une seconde fois la circonférence en* A, B, C. *Démontrer que le lieu géométrique de l'orthocentre de* ABC *est une circonférence.*

Le lieu géométrique du centre de gravité et du centre du cercle des neuf points de ABC, est également une circonférence.

483. — n *étant un entier positif quelconque, démontrer que :*

$3^n + 4^{2n+3}$	est divisible par	13,
$2^n + 3^{3n+2}$	—	7,
$3^n + 2^{8n+5}$	—	11,
$2^n + 5.27^{5n+1}$	—	17,
$2^n + 3^{7n+9}$	—	19,
$3^n + 5.2^{8n+5}$	—	23,
$2^n + 3^{17n+14}$	—	29,
$3^n + 2^{5n+14}$	—	29,
$2^n + 27^{8n+5}$	—	31,
$3^n + 4^{13n+9}$	—	37,
$27^n + 2^{11n+7}$	—	43,
$7^n + 2^{7n+5}$	—	11,
$2^n + 7^{11n+6}$	—	13,
$5^n + 7^{15n+8}$	—	17,
$3^n + 7^{2n+11}$	—	23,
$7^n + 11^{5n+6}$	—	13,
$5^{n+3} + 11^{3n+1}$	—	17,
$13^{2n+1} + 11^{8n+4}$	—	17,
$13^n + 3^{17n+9}$	—	19.

On peut trouver une infinité de relations du même genre.

Ces propositions peuvent se démontrer d'une manière uniforme : soit en constatant que les résidus sont complémentaires par rapport au module; soit en vérifiant la proposition pour les premières valeurs de n, et ensuite montrant que la proposition supposée vraie pour n est vraie pour $n+1$.

QUESTION PROPOSÉE

810. — Le point o est le centre du cercle circonscrit au triangle abc et a', b' sont les pieds des hauteurs de ce triangle, issues de a, b :

1° aob', boa' sont équivalents; 2° Le triangle aob et le quadrilatère $oa'cb'$ sont équivalents? (*Mannheim*).

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

SUR
LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite*, 1897, page 169)

62. — *Dans chaque groupe, le lieu des foyers est une circonférence concentrique au cercle bitangent de seconde espèce.*

Soit F (*fig.* 35) l'un des foyers; on a [**49**]

$$H'F = er';$$

H'F est donc constant.

Cette expression de H'F donne, avec la seconde des égalités (1) et l'une des égalités (2),

$$\overline{H'F}^2 = HH'.H'\Omega_1;$$

ainsi, le rayon du lieu est la tangente menée de H' à la circonférence décrite sur $H\Omega_1$ comme diamètre.

63. — Soit S' (*fig.* 35) le saillant correspondant à l'une des coniques et au cercle bitangent de seconde espèce; soit G la projection du centre O sur HH'; menons OI parallèle à cette dernière ligne jusqu'à sa rencontre en I avec $S'\Omega_1$. Les deux droites HH', $S'\Omega_1$ étant perpendiculaires entre elles [**60**], les triangles semblables OHH', OIS' donneront HH'.OI = OH'OS'. Dans le premier produit, on peut remplacer OI par $G\Omega_1$; quant au second, il est égal à c^2 [**44**]; il vient donc

$$HH'.G\Omega_1 = c^2,$$

ce qui permet de compléter les relations (2), et d'écrire

$$\frac{a^2}{H'\Omega} = \frac{b^2}{H\Omega} = \frac{c^2}{HH'} = G\Omega_1. \tag{4}$$

D'après cela, si, sur la circonférence HH', on a choisi ou déterminé le point qui doit servir de centre à la conique, il sera facile de construire les éléments linéaires de cette conique.

64. — De deux cercles bitangents à une conique et n'ayant pas leurs centres sur le même axe, celui de première espèce est intérieur à l'autre, dans le cas de l'ellipse; il lui est extérieur dans le cas de l'hyperbole.

Géométriquement, il n'y a donc pas de conique bitangente à deux cercles qui se coupent.

Si l'un des cercles enveloppe l'autre, toutes les coniques bitangentes seront des ellipses dont l'axe focal passera par le centre du plus petit. Elles formeront deux groupes dont chacun ne contiendra que des courbes semblables entre elles. Le lieu complet de leurs foyers se composera de deux circonférences concentriques au plus grand des deux cercles.

Dans le cas de deux cercles extérieurs, toutes les coniques sont des hyperboles. Pour une première série d'entre elles, l'axe focal passe par le centre de l'un des cercles ; pour la seconde série, il passe par le centre de l'autre. En changeant, dans les égalités (4), H en H′, et réciproquement, on voit que la seconde série est formée des hyperboles conjuguées à celles qui entrent dans la première. Dans chaque série, il y a deux groupes dont chacun ne contient que des courbes semblables entre elles. Le lieu complet des foyers se compose de quatre cercles, deux à deux concentriques.

65. Problèmes. — *Construire les éléments d'une conique bitangente à deux cercles donnés, sachant de plus qu'elle doit être concentrique à l'un* — ou *lui être osculatrice* — ou *passer par un point donné* — ou *avoir pour tangente une droite donnée.*

(*A suivre*).

NOTICE HISTORIQUE
SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir 1897, page 177)

XLI. — *Dans la base* AFB (*fig.* 65) *d'un onglet, inscrivons un polygone régulier* BCD...F, *et coupons-le par les plans perpendiculaires* BCc, CDdc, DEed,... *La surface latérale du prisme ainsi formé a pour mesure* $\frac{\varphi B.AC}{2}$. En effet, cette surface s'exprime par

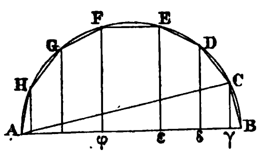


Fig. 65

$$\left(\frac{Ff+Ee}{2}+\frac{Ee+Dd}{2}+\ldots\right)BC=\frac{(F\varphi+E\varepsilon)BC+(E\varepsilon+D\delta)BC+\ldots}{2}$$

Corol. — Si la demi circonférence (*fig.* 63) est divisée en un nombre quelconque d'arcs égaux BP, PE,...MA, on a d'après XL

$$PK + EI + \ldots + MN = \frac{AB.AP}{2.PB}.$$

Donc la surface totale du prisme (XLI) a pour mesure $\frac{AB.AC}{2}$ (*fig.* 65) (*).

XLII. — *A la base* AFB *d'un onglet* (*fig.* 66), *circonscrivons un segment de polygone régulier* RQPNMB : *la surface latérale du tronc de prisme circonscrit à l'onglet et ayant ce segment pour base a pour mesure, déduction faite du triangle* BMm *correspondant au côté* BM, *l'expression* $\frac{AB.AC}{2}$. Désignons par les petites lettres correspondantes les intersections des arêtes du prisme avec le plan sécant, la surface indiquée a pour expression

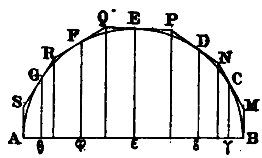


Fig. 66

$$QR(F\varphi + E\varepsilon + D\delta + C\gamma).$$

On est encore ramené à XL.

Corol. — La surface latérale du prisme total moins les deux triangles BM*m*, AS*s* est donc toujours égale à la moitié du carré du diamètre.

XLV. — *La surface latérale de l'onglet est égale à la moitié du carré du diamètre*. Conséquence des deux propositions précédentes. Démonstration par la méthode d'exhaustion.

XLVI. — *La partie de la surface latérale de l'onglet correspondant à l'arc* CB (*fig.* 67) *a pour mesure la moitié du rec-*

(*) Soit O le centre de l'arc BC (*fig.* 63) : on aura pour la somme des prismes triangulaires tronqués POB, EOP, DOE, COD

$$\text{tri.OPB}\left(\frac{Pp}{3} + \frac{Pp+Ee}{3} + \frac{Ee+Dd}{3} + \frac{Dd+Cc}{3}\right) = \frac{OB.PK}{6}(2.PK + 2.EI + 2.DH + CG),$$

d'où une autre manière de calculer le volume du prisme inscrit dans un segment d'onglet, et par là le volume de l'onglet lui-même.

tangle de AB *et de* Bγ. De là, la mesure de la surface de l'onglet correspondant à un segment CD.

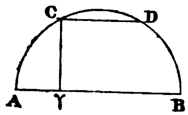


Fig. 67

LIV. — *Les surfaces latérales de deux onglets sont comme leurs hauteurs.* Conséquences de XLI et de XLII.

On a ainsi le moyen de mesurer le volume et la surface de tous les onglets construits sur le demi-cercle ou un segment quelconque et par un plan quelconque.

CCV. — *Mesure du cylindre parabolique et du segment de parabole.* Soit le segment parabolique quelconque ABC (*fig.* 68);

on a
$$GI.GL = \overline{GK}^2,$$

donc le cylindre parabolique produit par GI ductum in GL est égal à la pyramide résultant de GK ductum in se. Cette pyramide étant égale au tiers du prisme GL ductum in se, il en est de même du cylindre. Le prisme et le cylindre ayant des hauteurs égales, la base du premier est donc le triple de celle du second, donc la surface AICD vaut le tiers du rectangle AC.

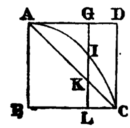


Fig. 68

LXXXVI. — *Deux onglets déterminés dans un cylindre parabolique par deux plans d'égales inclinaisons sont comme les cinquièmes puissances de leurs cordes.* Soient ADC, ALK (*fig.* 69) les bases des deux onglets. Divisons HK et BC proportionnellement en Q et P, puis menons des plans perpendiculaires qui déterminent dans les deux onglets les triangles semblables QN*n*, BM*m*. Le reste s'achève sans difficulté à cause de

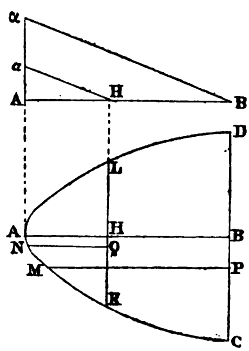


Fig. 69

$$\frac{Nn}{Mm} = \frac{NQ}{MP} = \frac{KQ.QL}{CP.PB}.$$

Il tire de cette proposition la mesure de l'onglet parabolique par des transformations trop longues pour qu'elles puissent être indiquées ici.

CXXIX. — *Dans deux demi-ellipses* AB *inscrivons deux segments de paraboles* a, b : *les sphéroïdes provenant de* A *et de* B *sont entre eux comme les produits des segments paraboliques multipliés respectivement par les demi-axes des ellipses.* On a en effet (*fig.* 70).

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{OB}^2} = \frac{AP.PC}{AO.OC} = \frac{PN}{BO} \quad \text{d'où } \overline{MP}^2 = PN.OB,$$

donc le solide de la demi-ellipse ABC ductum in se est égal au cylindre ayant la parabole pour base et OB pour hauteur.

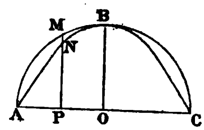


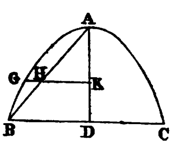
Fig. 70

Or, le solide formé par une surface ductum in se est à celui produit par la révolution de cette même surface comme le rayon du cercle est à sa circonférence. La proposition est donc démontrée.

De cette remarque, — nouveau corollaire du théorème de Kepler, — découlent un grand nombre de mesures de corps nouveaux.

Inutile d'ajouter que la proposition CXXIX ramène la mesure de la tranche de sphéroïde à celle d'une tranche sphérique.

CLV. — *Le conoïde parabolique est au cône inscrit comme trois à deux.* En effet, on a (*fig.* 71)



Fig, 71

$$\overline{GK}^2 = HK,BD,$$

le reste de la démonstration s'achève à l'aide de la remarque précédente.

CLXXXIX. — *Mesure du conoïde hyperbolique.* Considérons le cône asymptotique MON du conoïde PCQ (*fig.* 72); chaque section de ces deux solides détermine une couronne circulaire MKNQP, dont la surface est constante, puisque PK = PM = AC : le volume concave produit par la révolution de CAMP a ses sections égales à celles du cylindre AS, et par suite il lui est égal.

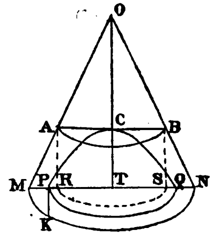


Fig. 72

CXCVII. — *A l'extrémité* C *de l'axe de*

l'ellipse AB (*fig*, 73), *menons une tangente* AC, *construisons l'hyperbole* CB, *et tirons* CB : *le conoïde produit par la révolution de l'hyperbole est égal à la somme du cône produit par la droite* CB *et du sphéroïde produit par l'ellipse* AB.

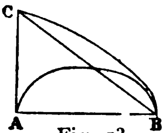


Fig. 73

CXCVIII,CC,CCIV. — *Coupons un cône circulaire quelconque par un plan* MPN, *parallèle à la génératrice* SB : *la partie* SMNP *du cône est au tétraèdre* SMNP *comme* 4 *à* 3 (*fig*. 74). *Si* TR *est une autre section parallèle à la première, les deux parties du cône* SMNP, SQTR *sont comme* $\overline{NP}^3$ *est à* $\overline{TR}^3$, *de sorte que si* BR = AP, *ces deux parties sont égales.*

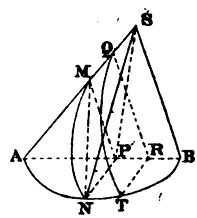


Fig. 74

(*A suivre*).

EXERCICES

Par M. **Boutin**

464. — *On considère le tableau :*

				137						
			65	61	57	53	49			
			69	17	13	9	45			
			73	21	1	5	41			
			77	25	29	33	37	105		
			81	85	89	93	97	101		

qui comprend tous les nombres impairs de la forme : $4n + 1$,

disposés dans leur ordre numérique, en tournant toujours dans le même sens. Démontrer que : (le tableau est supposé illimité).

1° *La grande diagonale* 1-9 *contient les carrés de tous les nombres impairs;*

2° *La seconde grande diagonale* 1-17, *ou* 1-33, *contient, d'une part, des carrés de nombres pairs, ces carrés augmentés d'une unité; d'autre part, les carrés diminués de trois unités des autres nombres pairs;*

3° *La diagonale* 5-45, *prolongée indéfiniment dans le sens* 5-45 *ne contient aucun nombre premier.*

Ces nombres sont compris dans la formule :

$$16n^2 + 24n + 5 = (4n + 1)(4n + 5).$$

4° *La diagonale* 21-77, *indéfiniment prolongée dans ce sens, ne contient aucun nombre premier.*

Les nombres de cette ligne sont de la forme :

$$16n^2 + 40n + 21 = (4n + 3)(4n + 7).$$

5° *La diagonale* 97-105, *indéfiniment prolongée dans ce sens, ne contient, à partir de* 105, *aucun nombre premier.*

Ces nombres sont compris dans la formule :

$$16n^2 + 88n + 105 = (4n + 7)(4n + 15).$$

6° *La diagonale* 137-65, *indéfiniment prolongée dans ce sens, ne contient, à partir de* 65, *aucun nombre premier.*

Les nombres de cette diagonale sont de la forme :

$$16n^2 + 72n + 65 = (4n + 5)(4n + 13).$$

7° *L'oblique* 1-85, *indéfiniment prolongée dans ce sens, ne contient aucun nombre premier.*

Les nombres de cette oblique sont de la forme :

$$64n^2 + 20n + 1 = (4n + 1)(16n + 1).$$

On peut multiplier indéfiniment les propositions de ce genre.

465. — *On construit le tableau :*

67	63	59	55	51	
71	19	15	11	47	
75	23	3	7	43	
79	27	31	35	39	
83	87	91	95	99	

qu'on prolonge indéfiniment; il est analogue au précédent, mais tous les nombres sont augmentés de deux unités.

1° *La diagonale* 3-35, *prolongée indéfiniment dans ce sens, ne contient* (sauf 3) *aucun nombre premier.*

Ces nombres sont de la forme :

$$(4n + 1)(4n + 3).$$

2° *La diagonale* 15-63, *prolongée indéfiniment dans ce sens, ne contient aucun nombre premier.*

Ces nombres sont de la forme :

$$(4n + 3)(4n + 5).$$

On peut multiplier indéfiniment ces propositions négatives.

En disposant de la même manière les termes d'une progression arithmétique quelconque, on peut former une infinité de tableaux analogues aux précédents, et multiplier les remarques analogues. Ces tableaux ne révèlent rien quant à la distribution ou loi des nombres premiers.

466. — *Autour d'un point* P, *pris dans le plan d'une circonférence de centre* O, *tournent deux sécantes dont l'angle reste constant. La droite qui joint les milieux des portions de sécantes comprises à l'intérieur du cercle enveloppe une circonférence dont le centre est le milieu de* OP.

Démonstration géométrique élémentaire.

467. — *On considère un faisceau de trois droites* : OA, OB, OC, *faisant entre elles des angles de* 120° ; *par un point quelconqae* M *de leur plan, on mène trois droites parallèles aux premières*

et les rencontrant en A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. *Ces points sont les sommets de deux triangles équilatéraux égaux entre eux, leur côté est égal à* OM. *Ces deux triangles sont symétriques par rapport au milieu de* OM.

Démonstration géométrique élémentaire.

468. — *On prolonge dans un même sens de rotation, et d'une longueur égale à eux-mêmes, les côtés d'un carré, les extrémités de ces lignes sont les sommets d'un nouveau carré sur lequel on agit comme sur le précédent, et ainsi de suite. Démontrer qu'aucun des carrés successifs ainsi obtenus n'a ses côtès parallèles à ceux du carré primitif.*

Le rapport des angles des côtés avec une direction fixe est incommensurable.

469. — a *et* b *étant des angles quelconques, vérifier la formule :*

$$\frac{2(1 - \text{tg a tg b})^2}{\cos^2(a + b)} = (\sec^2 a + \sec^2 b)(1 - \text{tg a tg b})$$
$$+ (\text{tg a} + \text{tg b})(\text{tg a} \sec^2 b + \text{tg b} \sec^2 a).$$

470. — $A_1B_1C_1$ *est le triangle podaire d'un point* $M(x_1, y_1, z_1)$ *du plan du triangle* ABC. *On mène par* A, B, C, *des parallèles respectives à* B_1C_1, A_1C_1, B_1A_1 ; *ces parallèles déterminent un second triangle* A'B'C'. *On demande les coordonnées normales du point* P, *centre d'homothétie de* $A_1B_1C_1$ *et* A'B'C'.

On trouve :

$$\frac{x}{a(x_1 + y_1 \cos C)(x_1 + z_1 \cos B)} = \frac{y}{b(y_1 + x_1 \cos C)(y_1 + z_1 \cos A)}$$
$$= \frac{z}{c(z_1 + x_1 \cos B)(z_1 + y_1 \cos A)}.$$

Si M est O, P est G.
Si M est I, P est le point :

$$x : y : z = \frac{a}{1 + \cos A} = \frac{b}{1 + \cos B} = \frac{c}{1 + \cos C}.$$

Si M est H, P le point :

$$\frac{x}{a \operatorname{tg} A} = \frac{y}{b \operatorname{tg} B} = \frac{z}{c \operatorname{tg} C}.$$

Si M est K, P est le point (coordonnées barycentriques)

$$\frac{\alpha}{7a^4 - (b^2 - c^2)^2} = \frac{\beta}{7b^4 - (a^2 - c^2)^2} = \frac{\gamma}{7c^4 - (a^2 - b^2)^2}.$$

471. — *Lieu des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque* M *d'une droite passant par le centre d'une ellipse sur la polaire de* M.

Le lieu est une hyperbole équilatère de même centre que l'ellipse et dont une asymptote est le diamètre conjugué à OM.

Théorème analogue pour l'hyperbole.

472. — x *et* y *étant des entiers premiers entre eux; les nombres de la forme* : $x^3 \pm 2y^3$, *n'admettent aucun des facteurs premiers* : 7, 13, 19, 37, 61.

473. — x, y, z, *étant des entiers premiers* : 1° *avec* 13; 2° *avec* 7; *les nombres de la forme* : $x^3 \pm y^3 \pm z^3$ *ne sont pas divisibles* : 1° *par* 13; 2° *par* 7.

474. — x *et* y *étant premiers entre eux, les nombres de la forme* : $x^5 \pm 2y^5$ *n'admettent pas le facteur premier* 11.

475. — A, B, C, *étant les angles d'un triangle,* θ *l'angle de Brocard de ce triangle; vérifier l'identité* :

$$5(\text{cotg}^2\theta - 1)\sum \text{cotg}^4 A - 4\,\text{cotg}\,\theta \sum \text{cotg}^5 A = \text{cotg}^6\theta - 5\,\text{cotg}^4\theta + 10\,\text{cotg}^2\theta - 10.$$

476. — M *étant un point d'une hyperbole équilatère de centre* O, N *le point où la normale en* M *rencontre l'axe non transverse; démontrer que l'on a* : OM = MN.

477. — O *étant le point de rebroussement d'une cardioïde,* M *un point quelconque de la courbe,* N, *le point où la normale en* M *rencontre l'axe; démontrer que l'on a* : OM = ON.

478. — *L'équation* : $x^2 - px + q = 0$ *ayant ses racines entières et positives* : 1° *l'expression* : $\frac{p(p+1)}{2} - q$ *est la somme de deux triangulaires*; 2° *l'expression* : $\frac{q}{4}(p + q + 1)$ *est entière et est le produit de deux triangulaires.*

479. — *L'équation* :

$$x^n - A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} - A_3x^{n-3} + \ldots \pm A_n = 0.$$

ayant toutes ses racines entières et positives, démontrer que :

1° $\frac{A_1(A_1 + 1)}{2} - A_2$ *est la somme de* n *triangulaires.*

2° *L'expression :*

$$\frac{A_n}{2^n}(1 + A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n),$$

est entière et produit de n *triangulaires.*

Ce qui généralise la proposition **478**.

480. — *On considère la suite :*

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = x \ldots\ldots u_n = xu_{n-1} + u_{n-2}.$$

Démontrer que x^n est une fonction linéaire de u_0, u_1, $u_2 \ldots u_n$, et qüe, par suite, un polynôme entier en x de degré n est une fonction linéaire entière de : u_0, u_1, $u_2 \ldots\ldots u_n$.

(Pour le développement de u_n et l'équation différentielle à laquelle cette quantité satisfait, voir : *J. E.* 1895, pages 109 et 129, Ex. 386 et 387).

On trouve :

$$\begin{aligned}
x &= u_1 \\
x^2 &= u_2 - u_0 \\
x^3 &= u_3 - 2u_1 \\
x^4 &= u_4 - 3u_2 + 2u_0 \\
x^5 &= u_5 - 4u_3 + 5u_1 \\
x^6 &= u_6 - 5u_4 + 9u_2 - 5u_0 \\
x^7 &= u_7 - 6u_5 + 14u_3 - 14u_1 \\
x^8 &= u_8 - 7u_6 + 20u_4 - 28u_2 + 14u_0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On peut remarquer que dans le développement de x^n par rapport aux indices décroissants de u, les signes sont alternativement positifs et négatifs, que le dernier terme de x^{2n} a le même coefficient, en valeur absolue, que le dernier terme de x^{2n-1} ; que les développements de x^{2n} et de x^{2n+1} ont le même nombre de termes ; le développement de x^{2n} ne comprend que des u d'indice pair ; celui de x^{2n+1} que des u d'indice impair. Si l'on dispose les coefficients, abstraction faite de leur signe, en un tableau analogue au triangle arithmétique, le coefficient de u_p, dans le développement de x^n est égal au coefficient de u_{p-1} dans x^{n-1}, augmenté du coefficient de u_{p+1} dans le même développement de x_{p-1} ; on peut donc prolonger aisément le tableau précédent. On trouve d'ailleurs pour

le développement de x^n la formule :

$$x^n = u_n - (n-1)u_{n-2} + \frac{n}{1.2}(n-3)u_{n-4} - \frac{n(n-1)}{1.2.3}(n-5)u_{n-6}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}(n-7)u_{n-8} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5}(n-9)u_{n-10} + \ldots\ldots$$

dont la loi est manifeste.

481. — *Si* N *est entier terminé par* 6 *ou* 8, *le chiffre des centaines de* N^5 *est impair.*

Si N *est terminé par l'unité, le chiffre des mille de* N^5 *est le même que celui qui termine le carré du chiffre des dizaines de* N.

Si N *est terminé par* 9, *le chiffre des mille de* N^5 *n'est ni* 2, *ni* 3, *ni* 7, *ni* 8.

Si N *est terminé par* 2 *ou* 4, *le chiffre des centaines de* N^5 *est pair.*

Deux nombres N *et* N′ *étant terminés par* 1, 3, 7 *ou* 9, *et tels que le chiffre de leurs dizaines soit* 2K *pour l'un et* 2K + 1 *pour l'autre; le chiffre des centaines de* N^5 *est de* N'^5 *est le même.*

482. — *La somme des carrés des* n *premiers nombres, et la somme des* n *premiers triangulaires ne sont jamais terminées par un des chiffres* : 2, 3, 7 *ou* 8.

483. — *Vérifier l'identité* :

$$\frac{4^{n+1}}{\sin^2 2^{n+1}a} - \frac{1}{\sin^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{4}{\cos^2 2a} + \ldots + \frac{4^n}{\cos^2 2^n a}.$$

484. — *Vérifier l'identité :*

$$\frac{\operatorname{cotg} a}{\sin^2 a} - \frac{8^{n+1}\operatorname{cotg} 2^{n+1}a}{\sin^2 2^{n+1}a},$$
$$= \operatorname{tg} a \sec^2 a + 8 \operatorname{tg} 2a \sec^2 2a + \ldots + 8^n \operatorname{tg} 2^n a \sec^2 2^n a.$$

485. — A, B, C, *étant les angles d'un triangle, on a les identités*

$$1^\circ\ 3 + \sum \frac{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{\cos^2 A} = \sum \frac{1}{\cos^2 A} + 3 \sum \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B,$$

$$2^\circ\ 4\left(\sum \operatorname{cotg} A\right)\left(\sum \operatorname{cotg}^3 A\right) - 3 \sum \operatorname{cotg}^4 A = \left(\sum \operatorname{cotg} A\right)^4 - 6,$$

$$3^\circ\ 3\left(\sum \operatorname{tg} A\right)\left(\sum \operatorname{tg}^2 A\right) - 2 \sum \operatorname{tg}^3 A = \left(\sum \operatorname{tg} A\right)^3 - 6 \sum \operatorname{tg} A.$$

486. — A, B, C, *étant les angles d'un triangle, résoudre l'équation :*

$$\frac{1}{x+\cotg A}+\frac{1}{x+\cotg B}+\frac{1}{x+\cotg c}=\frac{1}{\cotg A.\cotg B.\cotg c-x}.$$

487. — *Résoudre l'équation :*

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)$$
$$=(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e).$$

488. — *Résoudre l'équation :*

$$4\sin^2\frac{x}{2}(\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+4\cos 4x)=5\cos 4x.$$

489. — *Résoudre l'équation :*

$$4\sin^2\frac{x}{2}(\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+4\sin 4x)=5\sin 4x.$$

490. — *Résoudre l'équation :*

$$a(x^2+1)^4+bx(x^2+1)^3+cx^2(x^2+1)^2+bx^3(x^2+1)+ax^4=0.$$

491. — *Résoudre l'équation :*

$$(x+a+b)^5=(a+b-x)^5+(x+a-b)^5+(x+b-a)^5.$$

492. — *Résoudre l'équation :*

$$(x+a+b)^7=(a+b-x)^7+(x+a-b)^7+(x+b-a)^7.$$

493. — *Résoudre l'équation :*

$$(b+c-a+x)^6+(c+a-b+x)^6+(a+b-c+x)^6$$
$$+(a+b+c-x)^6=(a+b+c+x)^6+(a+b-c-x)^6$$
$$+(b+c-a-x)^6+(ca+c-b-x)^6.$$

494. — *Résoudre l'équation :*

$$(b+c-a+x)^8+(c+a-b+x)^8+(a+b-c+x)^8$$
$$+(a+b+c-x)^8=(a+b+c+x)^8+(a+b-c-x)^8$$
$$+(b+c-a-x)^8+(a+c-b-x)^8.$$

495. — *Résoudre l'équation :*

$$\frac{(a+2b)(2a+b)}{x+a+b}+\frac{3(3a+2b)(2a+3b)}{x-a-b}$$
$$+\frac{(2b-a)(3b-2a)(3b-a)}{(a-b)(x+a-b)}-\frac{(3a-2b)(2a-b)(3a-b)}{(a-b)(x-a+b)}=0.$$

496. — *Eliminer l'angle α entre les équations :*

$$x \sin\alpha + y \cos\alpha = a \operatorname{tg}\alpha.$$

$$x \cos\alpha - y \sin\alpha = \frac{a}{\cos^2\alpha}.$$

497. — *Vraie valeur, pour* b *tendant vers* a, *des expressions :*

1° $$A = \frac{\sin^m a - \sin^m b}{\cos^n a - \cos^n b},$$

2° $$B = \frac{\sin^m a - \sin^m b}{\operatorname{tg}^n a - \operatorname{tg}^n b},$$

3° $$C = \frac{\operatorname{tg}^m a - \operatorname{tg}^m b}{\operatorname{cotg}^n a - \operatorname{cotg}^n b}.$$

498. — A, B, C *étant les angles d'un triangle, résoudre les équations :*

1° $\sin A \sin(A - x) + \sin B \sin(B - x) + \sin C \sin(C - x) = 0$

2° $\sin A \sin(B + x) \sin(C + x) + \sin B \sin(A + x) \sin(C + x)$
$+ \sin C \sin(A + x) \sin(B + x) = 0,$

3° $\operatorname{tg}(A + x) \operatorname{tg}(B + x) + \operatorname{tg}(C + x) \operatorname{tg}(A + x)$
$+ \operatorname{tg}(B + x) \operatorname{tg}(C + x) = 1.$

499. — *Résoudre l'équation :*

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e)(x - f)$$
$$= (x + a)(x + b)(x + c)(x + d)(x + e)(x + f).$$

500. — *Résoudre l'équation :*

$$\begin{vmatrix} -1 & a & b & x \\ a & 1 & 1 & -1 \\ b & -1 & 1 & 1 \\ x & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

501. — *Résoudre l'équation :*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a & b \\ 1 & a & -1 & x \\ 1 & b & x & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

502. — *Résoudre l'équation :*

$$x^4(a - b) + x(b^4 - a^4) + a^4b - b^4a = 0.$$

503. — *Résoudre l'équation :*

$$\frac{1}{x - a} - \frac{76}{x - 2a} + \frac{534}{x - 3a} - \frac{1084}{x - 4a} + \frac{649}{x - 5a} = 0.$$

EXERCICES

Par M. **Bernès.**

(*Suite*, v. 1897; p. 180).

XXXI. — On considère un triangle ABC et le cercle circonscrit. Une sécante menée par A coupe BC en D et le cercle en E ; les polaires de E relativement aux cercles A(c), A(b) rencontrent cette sécante en ε, ε'. Démontrer que D divise BC et $\varepsilon\varepsilon'$ suivant un même rapport. Si $-\frac{m}{n}$ désigne ce rapport, en conclure la relation

$$mb^2 + nc^2 = (m + n)\mathrm{AD.AE}.$$

XXXII. — Si deux points D, D′ se déplacent sur BC sous la condition de rester symétriques l'un de l'autre relativement à un point fixe I de BC, la somme AD.AE + AD′.AE′ reste constante et réciproquement (E, E′ étant les rencontres de AD, AD′ avec la circonférence ABC). Quel doit être le point fixe I pour que cette somme soit nulle?

XXXIII. — Si T est la rencontre de BC et de la tangente en A au cercle ABC, et que les points D, D′ variables sur BC soient conjugués harmoniques l'un de l'autre relativement à T et à un point fixe I de BC, la somme $\frac{1}{\mathrm{AD.AE}} + \frac{1}{\mathrm{AD'.AE'}}$ est constante et réciproquement.

XXXIV. — Si la condition à laquelle on assujettit D, D′ est que TD.TD′ soit constant, le produit (AD.AE) (AD′.AE′) est aussi constant, et réciproquement. Que sont AD et AD′ dans le cas où la valeur constante du produit est égal à b^2c^2 ? — Montrer que supposer constant le produit TD.TD′ revient à supposer constante l'aire du triangle $\mathrm{AD_1D'}$, où $\mathrm{D_1}$ est symétrique de D relativement à la bissectrice de l'angle A.

XXXV. — Etant donné un triangle ABC et sur BC un point variable D. 1° Trouver le lieu de la rencontre du cercle qui passe par B et D, tangent à BA ; et du cercle qui passe par C et D, tangent à CA. 2° Si ces deux cercles coupent AD en α, α', démontrer que le point E où AD rencontre la circonférence ABC divise $\alpha\alpha'$ dans le rapport suivant lequel D divise BC. 3° Montrer que les circonférences ABα, ACα' sont tangentes.

XXXVI. — AD, AD′ sont deux droites isogonales dans le triangle ABC′ ; les deux circonférences qui passent par D et A et sont tangentes l'une à AB l'autre à AC coupent BC en β, γ, et les circonférences analogues relatives à D′ coupent BC en β', γ'. 1° Démontrer que les distances $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$ sont égales et de même sens : leur expression commune est $\frac{(m+n)^2 AD^2}{mna}$, en désignant par $-\frac{m}{n}$ le rapport suivant lequel D divise BC. 2° Si à D, D′ on substitue leurs conjugués harmoniques relativement à BC, les distances $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ conservent la même valeur, mais changent de sens. Cas particulier où D est le milieu de BC.

XXXVII. — Etant donné un cercle ω, d'un point fixe A de ce cercle comme centre on décrit un cercle de rayon ρ variable qui coupe le premier en B et de B comme centre avec le même rayon un cercle qui coupe le cercle A en M, M′. 1° Lieu de M et M′ lorsque ρ varie. 2° Si B′ est la seconde rencontre des cercles ω et A et que C et C′ soient les points où B′M, B′M′ coupent la circonférence ω, les distances MC, M′C′ sont invariables.

XXXVIII. — Un triangle ABC est inscrit dans un cercle O. Par B et C on trace deux cordes quelconques BB_1, CC_1 qui coupent AC, AB en β, γ. Lieu de la rencontre des droites B_1C_1, $\beta\gamma$. Même question en substituant au cercle une conique.

XXXIX. — Etant donné un triangle ABC, par A et B on trace un cercle quelconque qui coupe AC en β, BC en m ; par A et C on trace un autre cercle quelconque qui coupe AB en γ et BC en n. Lieu de la rencontre des cercles A$\beta\gamma$, Amn.

XL. — Par le sommet A du triangle ABC on trace une sécante quelconque coupant BC en α et le cercle ABC en α' ; par A et B on fait passer un cercle quelconque qui coupe BC en β et AC en β'. Lieu de la rencontre des cercles A$\alpha\beta$, A$\alpha'\beta'$.

XLI. — On considère un triangle ABC et le cercle inscrit O. Deux sécantes quelconques menées par B et C se coupent en α et rencontrent AC, AB en M, N; les tangentes au cercle menées par M N se coupent en β. Démontrer que la droite $\alpha\beta$ passe par un point fixe.

XLII. — Par les sommets A et B d'un triangle ABC on fait passer un cercle quelconque qui coupe BC en m, et par A et C un cercle qui coupe BC en n. La droite Am coupe le second cercle en p, et la droite An coupe la première en q. Démontrer que le cercle Apq passe par un point fixe.

XLIII. — Sur le côté BC d'un triangle ABC on construit un triangle isoscèle LBC; et on trace par A et B un cercle ω tangent à BL, par A et C un cercle ω' tangent à CL. 1° Lieu de la rencontre de ces cercles, lorsque L se déplace. 2° Si T est la rencontre des tangentes au cercle ABC en B et C, et que par A on trace deux droites coupant ω en P, ω' en P′, et dont l'angle (AP, AP′) est égal à l'angle (BT, BL) et de même sens, démontrer que la droite PP′ passe par un point fixe. 3° Si cette droite coupe de nouveau ω en Q, ω' en Q′ faire voir que les cercles APQ′, AQP′ sont tangents au cercle ABC.

XLIV. — On joint les sommets B, C d'un triangle ABC aux deux extrémités M, N d'un diamètre du cercle ABC. La perpendiculaire en A à AC est coupée en μ, ν par CM, CN; et la perpendiculaire en A à AB est coupée en μ', ν' par BM, BN. Démontrer que les droites $\mu\mu'$, $\nu\nu'$ sont perpendiculaires à BC, que m, n étant les rencontres de ces droites avec BC, An et AM sont deux droites isogonales, et de même Am et AN. De plus, les distances Am, An sont proportionnelles à AM, AN; et les distances $\mu\nu$, $\mu'\nu'$ sont dans le rapport $\frac{b}{c}$.

XLV. — On considère un triangle ABC et l'un des cercles I tangents aux trois côtés. Trois droites concourantes étant tracées par A, B, C qui coupent les côtés opposés en A_1, B_1, C_1, et les tangentes au cercle I menées par A_1, B_1, C_1 se coupant en α, β, γ (dans l'ordre habituel), démontrer que Aα, Bβ, Cγ rencontrent BC, CA, AB en trois points en ligne droite.

XLVI. — On considère deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ dont les côtés homologues BC et B_1C_1, CA et C_1A_1, AB et A_1B_1 se coupent en D, E, F, et le triangle $\alpha\gamma\beta$ qui a pour sommets les intersections de BC_1 et CB_1, CA_1 et AC_1, AB_1 et BA_1.

1° Faire voir que si les trois droites A_1D, B_1E, C_1F concourent, les trois conjuguées harmoniques de $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ relativement aux angles A, B, C concourent aussi au même point que les premières et réciproquement. 2° La condition de ce concours est que les trois points où AA_1, BB_1, CC_1 rencontrent BC, CA, AB soient en ligne droite.

XLVII. — D, E, F étant définis comme dans la question précédente et les coordonnées normales de A_1, B_1, C_1, relativement au triangle ABC pris pour triangle de référence, étant (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), montrer que la condition pour que les trois droites AD, BE, CF concourent, peut prendre la forme

$$(y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3)\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - 2x_1y_1z_1x_2y_2z_2x_3y_3z_3\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{y_1} & \frac{1}{z_1} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{1}{y_2} & \frac{1}{z_2} \\ \frac{1}{x_3} & \frac{1}{y_3} & \frac{1}{z_3} \end{vmatrix} = 0.$$

En conclure que si AA_1, BB_1, CC_1 coupent BC, CA, AB en trois points en ligne droite, la condition de concours de AD, BE, CF est que les deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ soient inscrits dans une même conique; et réciproquement si l'on suppose les deux triangles inscrits dans une même conique, la condition de concours de AD, BE, CF est que AA_1, BB_1, CC_1 coupent BC, CA, AB en trois points en ligne droite.

XLVIII. — Si deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont tels que les droites qui joignent les sommets homologues AA_1, BB_1, CC_1 coupent les côtés opposés du premier en trois points en ligne droite et les côtés opposés du second aussi en trois points en ligne droite, les six sommets A, B, C, $A_1B_1C_1$ sont situés sur une même conique; et réciproquement si ces six sommets sont sur une même conique et qu'en même temps les trois points de rencontre avec les côtés opposés de l'un des triangles soient en ligne droite, les trois points de rencontre de ces droites avec les côtés opposés de l'autre sont aussi en ligne droite.

XLIX. — Si dans la question précédente, le triangle ABC étant pris pour triangle de référence, $lx + my + nz = 0$ est l'équation de la droite déterminée par les rencontres de AA_1, BB_1, CC_1 avec BC, CA, AB, $\frac{L}{x} + \frac{M}{y} + \frac{N}{z} = a$, l'équation de la conique que l'on suppose passer par les six sommets. 1° Montrer que la droite déterminée par les rencontres AA_1, BB_1, CC_1 avec B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, a pour équation $Ll^2x + Mm^2y + Nn^2z = 0$. 2° Les côtés homologues de ABC, $A_1B_1C_1$ se coupant en D, E, F, les droites AD, BE, CE concourent en un point situé sur la conique $\frac{L}{x} + \frac{M}{y} + \frac{N}{z} = 0$ et sur la conique $\frac{1}{lx} + \frac{1}{my} + \frac{1}{nz} = 0$. Et les droites A, D, B, E, C, F concourent en un point situé sur la conique $\frac{L}{x} + \frac{M}{y} + \frac{N}{z} = 0$ et sur la conique $\frac{lL^2}{x} + \frac{mM^2}{y} + \frac{nN^2}{z} = 0$.

L. — Si deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont circonscrits à une même conique et que D, E, F étant les points de rencontre des côtés homologues BC et B_1C_1, CA et C_1A_1, AB et A_1B_1, les trois droites AD, BE, CF soient concourantes. 1° Il en est de même des droites A, D, B, E, C, F. 2° Les points où AA_1, BB_1, CC_1 rencontrent BC, CA, AB sont en ligne droite, et aussi les points où ces lignes rencontrent B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1.

3° Les six sommets A, B, C, A_1, B_1, C_1 sont situés sur une même conique.

4° Si ABC étant pris pour triangle de référence (x_1, y_1, z_1) est le point de concours de AD, BE, CF et $(Lx)^{\frac{1}{2}} + (My)^{\frac{1}{2}} + (Nz)^{\frac{1}{2}} = 0$, l'équation de la conique tangente aux six côtés, le point de concours de A, D, B, E, C, F est (Lx_1^2, My_1^2, Nz_1^2); les rencontres de AA_1, BB_1, CC_1, avec BC, CA, AB sont sur la droite $\sum \frac{x}{x_1(My_1 - Nz_1)} = 0$, et leurs rencontres avec B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sur la droite $\sum \frac{Lx}{My_1 - Ny_1} = 0$; enfin la conique circonscrite aux deux triangles a pour équation $\sum \frac{Lx_1^2(My_1 - Nx_1)}{x} = 0$.

EXERCICES

34. — *On a un point fixe sur chacun des côtés d'un angle donné* A. *On place* A *dans une position arbitraire en faisant toujours passer ses côtés par les points qu'ils contiennent. La droite, qui réunit les points de rencontre des côtés de ces deux angles, passe par un même point quelle que soit la position donnée à* A. **(M).**

35. — *Un triangle est partagé en deux parties équivalentes par les droites qui vont du centre du cercle circonscrit aux extrémités d'une hauteur.* **(M).**

36. — *On donne un tétraèdre* abcd *tel que les perpendiculaires abaissées de* a *et de* b *sur* cd *se rencontrent en* g *sur cette arête. Démontrer que les plans qui passent par le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre et respectivement par les droites* ab, ag, bg *partagent le tétraèdre en deux parties équivalentes.*
(M).

BIBLIOGRAPHIE

Géométrie dirigée par G. Fontené. Agrégé de l'Université, professeur au Collège Rollin.

Je m'étais promis de rendre compte, avec quelques détails, de ce livre qui, dans les quelques pages qui le composent, renferme tant de choses utiles. Mais le temps me fait défaut en ce moment pour faire cette analyse avec le soin qu'elle mérite et, avec ce numéro, cesse ma collaboration au Journal. J'adresse ici, à ce propos, à tous ceux qui m'ont soutenu dans la tâche que je n'abandonne pas sans un très vif chagrin, l'expression de mon affectueuse reconnaissance.

Je me borne donc à dire que l'ouvrage de M. Fontené, bien ordonné, clairement rédigé, résume, d'une façon qui me paraît propre à éclairer les esprits les plus rebelles, les principes, aujourd'hui classiques, relatifs à l'orientation des figures. On ne peut faire une certaine Géométrie, si les éléments qui composent la figure considérée : les droites, les circonférences, les plans, ne sont pas orientés. Tout le monde en tombe d'accord, et l'on sait qu'il faut donner, pour qu'une figure de géométrie soit bien définie, en même temps que ses éléments géométriques, l'orientation qu'ils doivent avoir.

On écrit $\overline{AB}$ pour exprimer que le segment AB est orienté de A vers B,

c'est-à dire pour exprimer que les segments considérés, sur la droite indéfinie qui passe par les deux points A, B, sont comptés comme positifs quand ils sont parcourus dans le sens du mobile partant de A pour aller en B. Cette notation est lourde et elle me paraît inutile. Comme je l'ai dit à M. Fontené, et il partage je crois cette opinion, en écrivant AB, sans autre signe, on peut convenir, une fois pour toutes, que cela veut dire *chemin parcouru sur la droite orientée par le mobile allant de* A *vers* B. Du moment que la droite est orientée, il y a superfétation à écrire $\overline{AB}$; mais il faut que la convention soit formelle et qu'on inculque aux élèves la différence essentielle qu'il convient de faire entre les deux écritures AB, BA.

G. L.

BACCALAURÉAT
DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE MODERNE
(*LETTRES-SCIENCES*)

Académie de Paris.
(Session de juillet 1897).

Problème obligatoire. — On donne un cône circulaire droit, dont la base a pour rayon R et dont la hauteur est h. On propose de couper ce cône par un plan de façon que la section soit parabolique, et de déterminer le point du diamètre de base perpendiculaire à la trace du plan sécant par lequel il faut conduire ce plan sécant pour que la section ait une surface maxima. Faire ensuite à main levée l'épure de la section en plaçant la base du cône sur le plan horizontal de projection et en inclinant la trace horizontale du plan sécant de 45° sur la ligne de terre.

Questions à choisir. — 1° Inégalité des jours et des nuits.

2° Lois de Képler. — Principaux astronomes avec leurs découvertes.

3° Mesure du temps. — Jour solaire vrai ; jour solaire moyen.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE
(*LETTRES-MATHÉMATIQUES*)

(PREMIÈRE SESSION).

Problème obligatoire. — Soient a, b, c les côtés d'un triangle, p le demi-périmètre ; A, B, C les volumes engendrés par la rotation du triangle autour de chacun de ses trois côtés (A par exemple sera le volume engendré par le triangle tournant autour du côté a). On donne A, B, C et l'on demande de calculer : 1° les rapports $\frac{a}{p} = \alpha$, $\frac{b}{p} = \beta$, $\frac{c}{p} = \gamma$; 2° les trois côtés a, b, c.

Questions à choisir. — 1° Démontrer qu'un nombre est décomposable d'une manière et d'une seule en facteurs premiers ; 2° théorie du plus grand commun diviseur ; 3° démontrer que la racine carrée d'un entier qui n'est pas un carré par fait est incommensurable.

(DEUXIÈME SESSION).

Problème obligatoire. — Couper une sphère de rayon R par un plan situé à une distance x du centre, de telle façon que l'aire de la section faite par ce plan dans la sphère soit égale à m fois la différence des aires des deux calottes sphériques déterminées par le plan sur la surface de la sphère. Discussion.

Questions à choisir. — 1° Propriété de la tangente à la parabole. Démonstration.

2° Propriété de la sous-normale de la parabole. Démonstration.

3° Mener à une parabole une tangente par un point donné du plan de la courbe. Discussion.

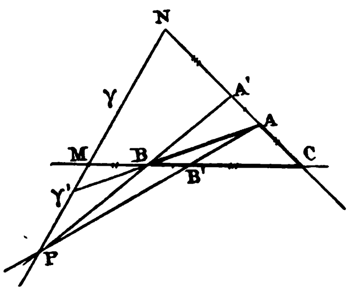
QUESTION 700

Solution, par M. Francis DAUZATS, soldat au 51° de ligne.

On donne un triangle ABC; *sur* BC, *dans le sens* BC, *on porte* $BB' = t$; *sur* CA *dans le sens* CA, $AA' = t$. *En supposant t variable, trouver le lieu décrit par le point de concours des droites* AB′, BA′.

Ce lieu est une droite γ; *elle rencontre* AB *en* γ'. *En considérant les points analogues* α', β', *on demande de démontrer que les trois points sont en ligne droite.* (G. L.)

1° Les rayons AB′ et BA′ se correspondent homographiquement. Le lieu de P est donc une conique. Pour $t = 0$, on voit que la droite AB fait toute entière partie du lieu. Donc, en dehors de cette droite, le lieu est une seconde droite γ.



2° Les points M et N où γ coupe BC et AC sont tels que

$BM = AC = b \quad AN = BC = a.$

D'après le théorème de Menelaüs, on a :

$$\frac{\gamma'A}{\gamma'B} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1, \qquad \text{d'où } \frac{\gamma'A}{\gamma'B} = \frac{a}{b}, \text{ car } MC = NC.$$

De même, on aurait

$$\frac{\alpha'B}{\alpha'C} = \frac{b}{c}, \quad \frac{\beta'C}{\beta'A} = \frac{c}{a}.$$

Donc
$$\frac{\alpha'B}{\alpha'C} \cdot \frac{\beta'C}{\beta'A} \cdot \frac{\gamma'A}{\gamma'B} = 1,$$

ce qui prouve que $\alpha'\beta'\gamma'$ sont en ligne droite.

Nota. — Solutions diverses par MM. Goyens ; L'Huillier ; Droz-Farny.

QUESTIONS PROPOSÉES

811. — Dans tout triangle rectangle, le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par les centres des trois cercles exinscrits, a pour longueur l'hypoténuse du triangle donné.

(*E. N. Barisien*).

812. — On donne un triangle *abc* et le cercle qui lui est circonscrit. D'un point *p*, de ce cercle, on élève une perpendiculaire à la droite *pa*, elle coupe *bc* en a'. De même, on a un point b' sur *ac*. Démontrer que la droite $a'b'$ passe par le centre du cercle.

(*Mannheim*).

813. — On considère un triangle rectangle BAC, l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle inscrit forme avec les côtés AB, AC de l'angle droit BAC un triangle dont l'aire est dans un rapport constant, quel que soit le triangle rectangle considéré BAC, avec l'aire du cercle inscrit. *G. L.*

814. — Un triangle de grandeur invariable se déplace de façon que deux de ses sommets restent sur deux droites données et que le troisième sommet reste sur un plan parallèle aux deux droites : on demande le lieu de ce troisième sommet? (*Mannheim*).

815. — La circonférence décrite sur le côté BC du triangle ABC, comme diamètre, coupe la hauteur AA' du même côté de BC que le sommet A, en α. On aura, de même, sur les autres hauteurs, les points β et γ. Les droites $B\gamma$ et $C\beta$ se coupent en α'. Soient, de même, les points β' et γ'. Les triangles ABC et $\alpha'\beta'\gamma'$ sont homologiques ; le centre d'homologie est le centre du cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$. (*Droz-Farny*).

816. — On considère tous les quadrilatères harmoniques ABCD dans lesquels AB est fixe, CD passant par un point fixe P de AB. Lieu des sommets C, D? (*Droz-Farny*).

817. — On donne une circonférence O et la tangente Δ au point A. Soit A′ le point de O, diamétralement opposé à A.

On construit une parabole P variable dont le foyer F est sur O et qui admet Δ comme directrice.

Quel est le lieu géométrique des points d'intersection de la corde FA′ avec P? (*Droz-Farny*).

818. — Etant donné un triangle ABC, le cercle exinscrit dans l'angle A a son centre en O_A et touche le côté BC en A′. Montrer que la droite O_AA' et les droites analogues O_BB', O_CC' concourent au centre du cercle circonscrit au triangle $O_AO_BO_C$.

(*E.-N. Barisien*).

819. — Les droites qui joignent le centre I du cercle inscrit à un triangle ABC aux sommets de ce triangle, rencontrent le cercle circonscrit en A′,B′,C′. Démontrer la relation

$$\frac{IA'}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{IB'}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{IC'}{\sin\frac{C}{2}} = 2R,$$

R étant le rayon du cercle circonscrit. (*E.-N. Barisien*).

820. — Soient le centre O et deux diamètres fixes rectangulaires AA′ et BB′ d'un même cercle. On considère deux rayons variables perpendiculaires OC et OD.

1° Le lieu du point de rencontre M des droites AC et BD est un cercle Σ.

2° Le lieu du point de rencontre M′ des droites A′C et B′D est le cercle Σ.

3° Le lieu du milieu de MM′ est un cercle.

4° La droite MM′ passe par la projection de C sur BB′ et par la projection de D sur AA′.

5° Les quatre points M, M′, C, D et O sont sur un même cercle.

(*E.-N. Barisien*).

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
ÉLÉMENTAIRES

AVIS AUX LECTEURS

Les lecteurs sont informés que la direction de ce journal a passé des mains de M. de Longchamps aux mains d'un comité composé de professeurs éminents des Ecoles spéciales, Lycées et Collèges de Paris, et présidé par M. Georges Mariaud, directeur des études à l'Ecole préparatoire Saint-Georges et professeur à l'Institut Commercial.

M. de Longchamps avait mis au service de cette publication, fondée depuis plus de 20 années, son activité si dévouée et sa compétence si éclairée : mais son éloge n'est plus à faire auprès de ceux qui l'ont suivi dans son œuvre.

La nouvelle Direction saura montrer un dévouement égal; M. Mariaud tient à l'affirmer ici, au nom du Comité et en son nom. Elle s'attachera à accroître encore l'intérêt de cette publication destinée aux jeunes gens qui préparent des examens et concours.

C'est ainsi que pour répondre à un besoin réel, né de la différence devenue profonde entre les divers genres d'examens et concours roulant sur les *Élémentaires*, il a été décidé que les questions proposées par le Comité seraient désormais classées par genres d'examens et concours. Cette modification inaugure une idée nouvelle et ne peut qu'être d'une grande utilité aux divers groupes de candidats.

Voici le nouveau plan de ce journal.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées par le Comité aux candidats :

1° *A l'Ecole spéciale militaire de Saint-Cyr* ;
2° *A l'Institut national agronomique* ;
3° *Au Baccalauréat lettres mathématiques* ;
4° *Aux Ecoles d'agriculture* ;
5° *Aux Ecoles de commerce.*

DEUXIÈME PARTIE

Solutions dans le même ordre des questions proposées dans les numéros précédents, suivies du nom des personnes ayant résolu les questions.

TROISIÈME PARTIE

Questions diverses, théories et démonstrations nouvelles relatives aux élémentaires.

CORRECTION DES COPIES

Mais il ne suffit pas aux divers groupes de candidats d'être guidés chacun séparément dans la route spéciale qui conduit au but; il faut encore, quand il s'agit d'un concours, que les candidats à un même concours puissent périodiquement *comparer* les progrès accomplis. Le Comité s'est aussi préoccupé de satisfaire à ce désideratum : il corrigera, annotera, *classera* et retournera *franco* les copies de ceux qui s'abonneront à la *Correction* et traiteront les questions mensuelles proposées dans le journal.

Ce classement des copies venues des divers points de la France sera pour le candidat le renseignement le plus précieux. Cette idée heureuse a rencontré l'adhésion de tous ceux à qui elle a déjà été communiquée.

Le Président du Comité,

GEORGES MARIAUD.

NOTA. — Voir, pour l'abonnement à la *Correction des copies*, à la fin du fascicule.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées par le Comité aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE ST-CYR

ÉCRIT

MATHÉMATIQUES

1. — On considère tous les triangles qui ont un sommet A commun, la bissectrice AD de l'angle A invariable de grandeur et de position et dont le cercle circonscrit passe par un troisième point fixe F de la droite AD ;

1° Démontrer que dans tous ces triangles le produit de la hauteur par le diamètre du cercle circonscrit est constant ;

2° Trouver le lieu du milieu du côté opposé au sommet A ;

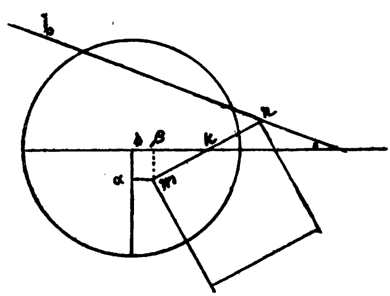
3° Trouver le lieu du point de rencontre des médianes ;

4° Construire le triangle connaissant, outre les trois points A, D, F, soit la grandeur de l'angle A, soit la longueur du côté opposé BC.

2. — Dans un triangle ABC on donne l'angle B = 30°, le rapport $\frac{b}{c} = m$ et la distance x entre les pieds des bissectrices des angles intérieur et extérieur du sommet A. Calculer le côté c, et construire géométriquement ce triangle.

ÉPURE

3. — Un cône droit a pour base une circonférence de rayon 9 centimètres et de centre s, située dans le plan H ; s qu'on placera au centre de la feuille est aussi la projection du sommet dont la cote est de $17^{cm},5$,



Un prisme a pour base un carré placé aussi dans le plan H et dont le côté $mn = 9^{cm},2$ est défini par les distances de m aux parallèles menées par s aux côtés du cadre : $\alpha m = 2$ centimètres,

$\beta m = 2^{cm},5$; et par la distance à s de l'intersection K, $sK = 6^{cm},2$. La direction des arêtes du prisme en projection est nb qui fait angle de 32° avec $s\beta$; leur pente $= 1/2$.

On demande de trouver l'intersection du prisme et du cône et de représenter le cône traversé par le prisme, celui-ci étant supposé enlevé. Tangentes aux points remarquables.

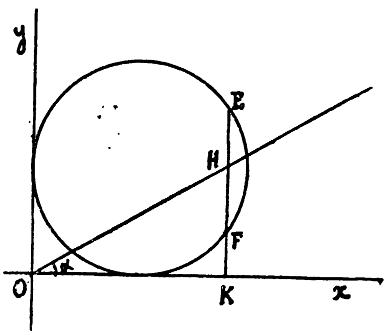
CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE

4. — On donne

$$A = 242,728$$
$$B = 32°6'57''$$
$$C = 110°32'20''.$$

QUESTIONS AYANT ÉTÉ PROPOSÉES A L'ORAL

5. — Etant donnés 2 axes rectangulaires et une circonférence tangente à ces axes par le point O on mène une sécante faisant un angle α avec l'axe des x ; déterminer une corde parallèle à l'axe des y et rencontrant la sécante en un point H tel que $\overline{EF}^2 + \overline{HK}^2 = m^2$.



Prendre pour inconnue $OK = x$.

6. — Calculer les angles d'un triangle connaissant a, $B - C = \alpha$ et la surface $= m^2$.

7. — Résoudre et discuter l'équation

$$x^2 - 2x + \log a = 0.$$

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

8. — Etant donnée une circonférence de centre O, à quelle distance x de O faut-il prendre un point P tel que si l'on mène de ce point les deux tangentes PA et PB au cercle O ; le cercle O' tangent à ces deux droites et à la circonférence O ait pour surface πm^2.

9. — Calculer les 3 côtés d'un triangle rectangle connaissant la somme $\frac{1}{3}\pi b^3$ des volumes engendrés par le triangle en tournant successivement autour des côtés de l'angle droit et la somme m^2 des surfaces du triangle et d'un rectangle de hauteur a ayant pour base le segment intercepté sur l'hypoténuse par les points de contact des cercles ex-inscrits dans les deux angles aigus.

Discuter. — Examiner en particulier le cas de $a = b$.

10. — Calculer en se servant des logarithmes la valeur de a donnée par

$$a = \frac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1},$$

pour $C = 38\,500$, $r = 0{,}035$, $n = 10$.

Dire quelle est cette formule.

PHYSIQUE ET CHIMIE

11. — 1° Sur l'un des plateaux d'une balance on a placé un vase contenant une dissolution saline de densité 1,5 et on a fait la tare pour établir l'horizontalité du fléau.

Au-dessus du vase on suspend par un fil fin un fragment de platine, de manière à ce qu'il plonge constamment dans le liquide. L'horizontalité du fléau sera-t-elle dérangée ? Que faudra-t-il faire pour la rétablir sachant que le platine a pour densité 21 et que le fragment pèse $75^{gr},6$.

12. — 2° Qu'est-ce que l'état hygrométrique de l'air ? Comment l'obtient-on par l'Hygromètre de Regnault que l'on décrira d'abord sommairement.

3° Préparation du phosphore blanc. Fabrication des allumettes.

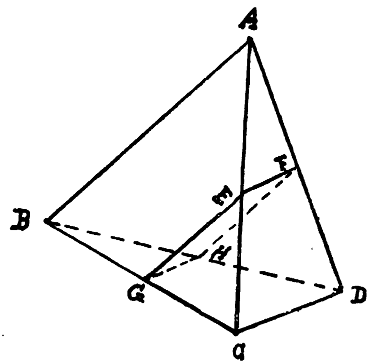
III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES MATHÉMATIQUES

MATHÉMATIQUES

13. — 1re (*Obligatoire*). On coupe un tétraèdre quelconque ABCD par un plan parallèle aux côtés opposés AB et CD ;

1° Démontrer que la section EFGH faite par ce plan dans le tétraèdre est un parallélogramme.

2° Démontrer que $\frac{EG}{AB} + \frac{EF}{CD}$ reste constant quand le plan EFGH se déplace parallèlement aux côtés.



3° Trouver la position du plan pour laquelle la surface du parallélogramme est maximum.

14. — 2me (*au choix*) I. Théorie du plus grand commun diviseur de 2 nombres par la division.

15. — II. Si un nombre N divisant A et B donne des quotients premiers entre eux, N est le plus grand commun diviseur de A et B.

16. — III. Tout nombre qui divise le produit de deux autres et est premier avec l'un d'eux divise l'autre.

PHYSIQUE

PREMIÈRE QUESTION (*Obligatoire*)

17. — Les deux poids de la machine d'Atwood sont de 105 grammes chacun; le poids additionnel est de 3 grammes. Avec quelle vitesse le poids descendant atteindra-t-il le curseur plein placé à $1^m,65$.

$$G = 9^m,8.$$

DEUXIÈME QUESTION (*Au choix*)

18. — I. Calculer l'accélération dans la machine d'atwood.

19. — II. Démontrer à l'aide de la machine d'atwood que les accélérations sont proportionnelles aux masses.

20. — III. Machine de Morin.

IV. — AU BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT MODERNE

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE QUESTION (*Obligatoire*)

21. — Etant donné le polynome

$$x^3 + px + q,$$

trouver la relation qui doit exister entre p et q pour que ce polynôme soit divisible par $(x - a)^2$.

DEUXIÈME QUESTION (*Au choix*)

22. — I. Démontrer la propriété de la tangente à l'ellipse.

23. — II. Lieu des symétriques d'un foyer par rapport aux diverses tangentes à l'ellipse.

24. — III. Lieu des points tels que les 2 tangentes à l'ellipse issues de chacun deux soient perpendiculaires l'une à l'autre.

PHYSIQUE

PREMIÈRE QUESTION (*Obligatoire*)

25. — Un vase cylindrique de verre ayant 2 centimètres carrés de section intérieure est suspendu par son fond à l'extrémité d'une tige de fer verticale longue de $0^m,75$ dont l'autre extrémité est fixée en un point A.

Quel poids de mercure faut-il y verser pour que le centre de gravité de cette masse de mercure reste à une distance constante de A.

Coefficient de dilatation linéaire du fer 0,000012,

» du verre 0,000008,

Coefficient de dilatation absolue du mercure 0,00018.

Densité du mercure à $0° = 13,6$.

DEUXIÈME QUESTION (*Au choix*)

26. — I. Lunette terrestre.

27. — II. Lunette de Galilée.

28. — III. Télescope de Newton.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

PREMIÈRE QUESTION

29. — On a un terrain rectangulaire dont on peut faire un nombre exact de lots de 150, 120 et 180 mètres carrés. La surface totale est inférieure à 20 ares.

1° Quelles sont les dimensions de ce terrain, sachant que sa longueur est double de sa largeur.

2° On a vendu ce terrain et on a placé à 4 1/2 $^0/_0$ le prix de vente. Au bout de 2 ans et 4 mois on a retiré, capital et intérêts compris, la somme de 23 868 fr. Quel est le prix du mètre carré ?

DEUXIÈME QUESTION

30. — On donne une pyramide régulière à base carrée dont le côté a 12 centimètres; l'arête a une longueur de 20 centimètres; on coupe le solide par un plan parallèle à la base et la section obtenue a une surface de 11 025 mètres carrés.

Calculer 1° la surface latérale de la pyramide à un centimètre carré près; 2° le volume à un centimètre cube près de la petite pyramide

TROISIÈME QUESTION

31. — Calculer par logarithmes la valeur de x donnée par

$$x = \sqrt[3]{(29{,}85)^2} \times \sqrt{(17{,}53^3)}.$$

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

32. — Calculer à $\frac{1}{11}$ près $\frac{27\sqrt{7}}{5}$.

33. — Un billet payable dans 54 jours escompté en dehors et en dedans au taux de 3 $^0/_0$ a donné 1 fr. 20 comme différence des deux escomptes. On demande la valeur nominale du billet.

34. — Déterminer un nombre de 3 chiffres sachant : 1° que le chiffre des dizaines égale celui des unités; 2° qu'en ajoutant 42 au double du nombre, on obtient le nombre renversé; 3° que si on met le chiffre des dizaines à la place de celui des centaines et ré-

ciproquement on obtient un nombre qui, augmenté de 27, égale le nombre renversé.

35. — Calcul logarithmique. — Calculer

$$x = 317,23\sqrt[6]{\frac{\overline{23,41}^{3}}{2\sqrt{3}}}.$$

DEUXIÈME PARTIE

Pour mémoire. — Cette partie du nouveau plan ne pouvant être remplie qu'à partir du n° 2 de novembre.

TROISIÈME PARTIE

Questions diverses

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

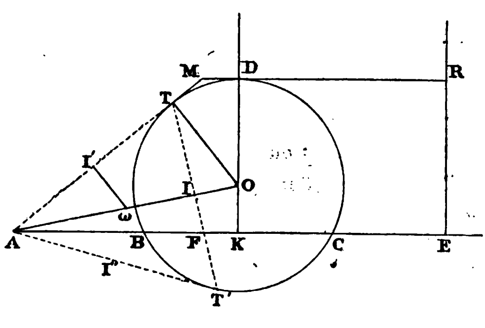
CONCOURS DE 1897

Solution, par M. le CHANOINE REBOUL, licencié ès-sciences mathématiques.

I. — On donne dans un triangle ABC l'angle A, le côté b et le rapport $\frac{a}{m} = K$ du côté a à la médiane correspondante m.

Calculer le côté c. — Discuter.

II. — On donne trois points fixes A, B, C en ligne droite; on considère une circonférence variable passant par les points B et C; on mène par le point A les deux tangentes AT, AT' et la corde des contacts TT'. On demande :



1° Les lieux géométriques des milieux des côtés du triangle ATT';

2° Le lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle;

3° Les lieux des points d'intersection de la tangente AT avec chacune des deux tangentes parallèles à la droite ABC.

1. — Les équations du problème sont évidemment :

$$\frac{a}{m} = \text{K},$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \text{A},$$

$$2m^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2.$$

En remplaçant, dans la seconde équation, a^2 par $m^2\text{K}^2$ et m^2 par $\frac{2(b^2 + c^2)}{\text{K}^2 + 4}$, on a pour calculer c :

$$\text{(A)} \qquad c^2 + \frac{2bc(\text{K}^2 + 4) \cos \text{A}}{\text{K}^2 - 4} + b^2 = 0.$$

Le termé connu b^2 étant positif, c pour être acceptable doit être réel et positif, c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$(1) \qquad (\text{K}^2 + 4)^2 \cos^2 \text{A} - (\text{K}^2 - 4)^2 > 0,$$

$$(2) \qquad \frac{\cos \text{A}}{\text{K}^2 - 4} < 0.$$

Il faut remarquer que l'inégalité (1) donne pour cos A, une valeur absolue inférieure à l'unité.

Cela posé, faisons sur A les deux hypothèses : $\text{A} < 90$, $\text{A} > 90$.

1° $\text{A} < 90$. L'inégalité (2) impose la condition $\text{K}^2 < 4$, et l'inégalité (1) se réduit à : $(\text{K}^2 + 4) \cos \text{A} + \text{K}^2 - 4 > 0$, ou :

$$\cos \text{A} > \frac{4 - \text{K}^2}{4 + \text{K}^2}.$$

Si cette condition est satisfaite le problème comporte deux solutions, si elle ne l'est pas le problème est impossible.

2° $\text{A} > 90$. L'inégalité (2) impose la condition $\text{K}^2 > 4$, et l'inégalité (1 se réduit à : $(\text{K}^2 + 4) \cos \text{A} - (\text{K}^2 - 4) > 0$, ou :

$$\cos \text{A} > \frac{\text{K}^2 - 4}{\text{K}^2 + 1}.$$

Comme précédemment, le problème comporte 2 ou v solutions selon q cette condition est ou n'est pas satisfaite.

Remarque. — Dans la discussion, nous avons supposé $\text{K}^2 \lessgtr 4$. En s posant $\text{K}^2 = 4$, l'équation (A) se réduit à : $2bc(\text{K}^2 + 4) \cos \text{A} = 0$, d' $\cos \text{A} = 0$. Le triangle donné est rectangle et l'on a pour c une vale indéterminée. On pouvait du reste prévoir ce résultat. Dans tout triang rectangle, en effet, le rapport K^2 vaut 4.

2. — 1° Soit O le centre de la circonférence variable, lequel se trou sur la perpendiculaire élevée au milieu K de BC. Posons AK = BK = b et joignons le point O aux points A et T.

Considérons le point I milieu de TT' comme intersection de OA et de TT', le triangle rectangle AOT donne :

$$\begin{aligned} AJ \times AO &= \overline{AT}^2, \\ &= AB \times AC, \\ &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Le produit est constant, le point O décrit la perpendiculaire KO, le point J décrira donc la figure inverse, c'est-à-dire une circonférence passant au pôle A et au point F (intersection de la droite fixe ABC et de la droite mobile TT', ce point F est fixe). AF est le diamètre de cette circonférence et a pour valeur $\frac{a^2 - b^2}{a}$.

Considérons le point I' milieu de AT. On a évidemment :

$$AI' = \frac{AT}{2} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}.$$

Le lieu décrit par le point I' est donc une circonférence de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}$.

Le lieu décrit par le point I" milieu de AT' est évidemment la même circonférence.

2° Le centre ω du cercle circonscrit au triangle ATT' se trouve à l'intersection de AD et de la perpendiculaire I'ω élevée sur le milieu de AT. Cela posé, les triangles semblables ATO, AI'ω donnent :

$$\frac{A\omega}{AD} = \frac{AI'}{AI} = \frac{1}{2}.$$

A étant considéré comme centre d'homothétie et $\frac{1}{2}$ comme rapport, ω décrit une droite perpendiculaire à la droite fixe ABC.

3° Soient M le point de rencontre des deux tangentes au cercle mobile O et ER une perpendiculaire à ABC telle que l'on ait : $DR = \sqrt{a^2 - b^2}$.

La tangente MD et MT, issues du point M, étant égales :

$$DR = MA,$$

d'où :

$$MR = MA.$$

Le point M décrit donc une parabole ayant le point A pour foyer et la droite ER pour directrice.

EPURE

Une sphère est tangente au plan horizontal en un point A ; elle passe par un point B qui a pour côté 72^{mm} et qui se projette en un point b à une distance de A égale à 96^{mm}. (Placer A et b sur une droite distante de 115^{mm} du bord inférieur de la feuille, A à 20^{mm} à gauche du milieu de cette droite et b à gauche de A).

Considérer le plan P mené, par le point A, perpendiculairement au rayon OB, et le triangle équilatéral CDE inscrit à la section de cette sphère par ce plan, en plaçant horizontalement le côté DE de manière que sa cote soit inférieure à celle de C. — Sur la perpendiculaire en C, au plan P, prendre un point S de cote égale à 240^{mm}.

La sphère étant supposée opaque, représenter la portion de son volume comprise dans le trièdre dont les arètes sont les droites indéfinies SC, SD, SE.

CALCUL LOGARITHMIQUE

Résoudre un triangle connaissant les trois côtés

$$a = 2\,598 \qquad b = 2\,333 \qquad c = 2\,543.$$

Formules :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r = \frac{S}{p}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}; \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}; \qquad \operatorname{tg} C = \frac{r}{p-c}$$

$p = 3\,737$; $p - a = 1\,139$; $p - b = 1\,404$; $p - c = 1\,194$

$$\log p = 3{,}57252 \qquad \operatorname{colog} p = \bar{4}{,}42648$$

$$\log(p-a) = 3{,}05652 \qquad \operatorname{colog}(p-a) = \bar{4}{,}94343$$

$$\log(p-b) = 3{,}14737 \qquad \operatorname{colog}(p-b) = \bar{4}{,}85263$$

$$\log(p-c) = 3{,}07700 \qquad \operatorname{colog}(p-c) = \bar{4}{,}92300$$

$$\operatorname{Log} S = \frac{1}{2}\log p + \log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c) =$$
$$= 6{,}42671$$

$$S = 2\,671\,200 \text{ mètres carrés}$$

$$\log r = \log S + \operatorname{colog} p = 2{,}85417 :$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \log r + \operatorname{colog}(p-a) = \bar{1}{,}79767 \qquad A = 64°13'20''$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \log r + \operatorname{colog}(p-b) = \bar{1}{,}70682 \qquad B = 53°57'46''$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \log r + \operatorname{colog}(p-c) = \bar{1}{,}77719 \qquad C = 61°48'54''$$

Le total est bien $A + B + C = 180°$

SOLUTION DES QUESTIONS

Du Concours d'admission de 1897 à l'Institut National Agronomique

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE QUESTION

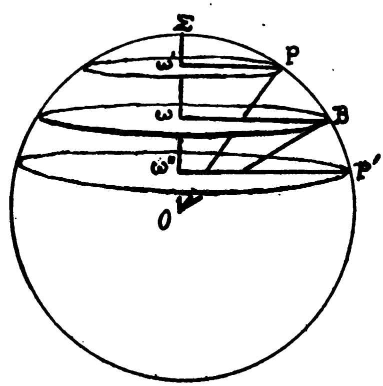
Par la circonférence d'un cercle de rayon r *on fait passer une sphère que l'on coupe par deux plans* P *et* P' *parallèles au plan du cercle donné et situés de part et d'autre à une distance* h *de ce plan.*

1° *Trouver à quelles conditions on peut déterminer le rayon* R *de cette sphère de façon qu'elle soit coupée par chacun des deux plans* P *et* P' *et déterminer les limites entre lesquelles varie* R ;

2° *Évaluer le volume du segment sphérique déterminé par les plans* P *et* P' *et la sphère.*

1° Il est tout d'abord évident qu'il faut $R \geqslant r$. Cette condition peut d'ailleurs se déduire par le calcul. Soient ω le centre du cercle donné, ω' et ω'' ceux des cercles de section, Σ et Σ' les pôles communs de ces cercles, on a

$$\omega\Sigma + \omega\Sigma' = 2R$$
$$\omega\Sigma \times \omega\Sigma' = r^2$$



$\omega\Sigma$ et $\omega\Sigma'$ sont donc racines de l'équation

$$X^2 - 2RX + r^2 = 0$$

dont les racines seront réelles si

$$R^2 - r^2 \geqslant 0$$

ou

$$R \geqslant r.$$

D'autre part, pour qu'il y ait *possibilité* d'intersection avec les deux plans d'une sphère menée par la circonférence ω il faut qu'on ait ($\omega\Sigma$ étant $< \omega\Sigma'$)

$$h \leqslant \omega\Sigma$$

ou

$$h \leqslant R - O\omega$$

ou

$$h \leqslant \sqrt{r^2 + \overline{O\omega}^2} - O\omega$$

Le deuxième membre est variable, mais a pour maximum r (pour $O\omega = 0$, c'est-à-dire quand la sphère décrite est concentrique à la circonférence donnée). Donc, pour qu'il y ait double intersection *possible* il faut : $h < r$.

Exprimons maintenant la condition pour que la double intersection *ait lieu*.

h doit être inférieur à $\omega\Sigma$ et à $\omega\Sigma'$ ce qui exige que l'on ait

$$f(h) = h^2 - 2Rh + r^2 \geqslant 0$$

d'où

$$R < \frac{h^2 + r^2}{2h}.$$

Les limites de variation de R *sont donc* :

$$r \leqslant R \leqslant \frac{h^2 + r^2}{2h}$$

avec cette condition de possibilité du problème : $h < r$.

2° Soient ρ et ρ' les rayons des sections P et P' : le volume du segment est :

$$V = \frac{1}{6}\pi\overline{\omega'\omega''}^3 + \frac{1}{2}\pi\omega'\omega''(\rho^2 + \rho'^2)$$

ou en remplaçant $\omega'\omega''$ par $2h$

$$V = \frac{4}{3}\pi h^3 + \pi h(\rho^2 = \rho'^2)$$

or

$$\rho^2 = \overline{OP}^2 - \overline{O\omega'}^2 = R^2 - (h + \sqrt{R^2 - r^2})^2$$
$$\rho'^2 = \overline{OP'}^2 - \overline{O\omega''}^2 = R^2 - (h - \sqrt{R^2 - r^2})^2$$
$$\rho^2 + \rho'^2 = 2R^2 - (2h^2 + 2R^2 - 2r_2) = 2(r^2 - h^2)$$

d'où

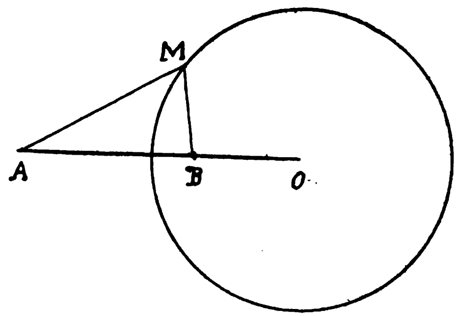
$$V = \frac{4}{3}\pi h^3 + 2\pi h(r^2 - h^2)$$

et

$$V = \frac{2}{3}\pi h(3r^2 - h^2).$$

DEUXIÈME QUESTION

Sur une droite indéfinie on prend un point O tel que $\frac{AO}{BO} = K^2$ et de O comme centre, on décrit un cercle ayant pour rayon la moyenne géométrique entre OA et OB. Évaluer le rapport $\frac{MA}{MB}$, M étant un point quelconque de ce cercle.



D'après l'énoncé on a

$$\frac{AO}{MO} = \frac{MO}{BO}.$$

Donc les deux triangles AOM et MOB sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels. Donc on a :

$$\frac{\overline{MA}^2}{\overline{MB}^2} = \frac{\overline{AO}^2}{\overline{MO}^2} = \frac{\overline{AO}^2}{AO \times BO} = \frac{AO}{BO} = K^2$$

d'où

$$\frac{MA}{MB} = K.$$

CALCUL LOGARITHMIQUE

TROISIÈME QUESTION

Calculer la valeur numérique de $h - C$, C étant donné par la formule

$$C = \frac{(\mu - \lambda)th}{1 + \mu t}$$

sachant que

$$\mu = 0{,}0001818, \qquad \lambda = 0{,}0000184$$
$$t = 16, \qquad h = 736^{mm},1$$

(on se servira de tables logarithmiques).

On a

$$h - C = h\,\frac{1 + \lambda t}{1 + \mu t}.$$

Sous cette forme on reconnaît la formule de correction de la hauteur barométrique relative à la température. (Physique de Drion et Fornet, page 205). Substituant on a

$$h - C = 736,1 \frac{1 + 0,0000184 \times 16}{1 + 0,0001818 \times 16}.$$

Calcul de $1 + \lambda t$.

$$\text{Log } 16 = 1,20412$$
$$\text{Log } 0,0000184 = \bar{5},26482$$
$$\text{Log } 1 + \lambda t = \bar{4},46894$$

et d'où

$$\lambda t = 0,0002944$$

et

$$1 + \lambda t = 1,0002944.$$

Calcul de $1 + \mu t$.

$$\text{Log } 16 = 1,20412$$
$$\text{Log } 0,0001818 = \bar{4},25959$$
$$\text{Log } \mu t = \bar{3},46371$$

d'où

$$\mu t = 0,0029088$$

et

$$1 + \mu t = 1,0029088$$

dès lors

$$h - C = 736,1 \frac{1,0002944}{1,0029088}.$$

Prenant les logarithmes, on a

$$\text{Log } (h - C) = \log 736,1 + \log 1,0002944 + \text{colog } 1,0029088$$
$$\text{Log } 736,1 = 2,86694$$
$$\text{Log } 1,0002644 = 0,00128$$
$$\text{Colog } 1,0029088 = \underline{1,99866}$$
$$2,86688$$
$$h - C = 736$$

PHYSIQUE

Un aérostat du volume de 60 mètres cubes est complètement rempli d'hydrogène dont la densité, par rapport à l'air, est de 0,007. On demande quel doit être le poids de l'enveloppe et des accessoires pour qu'il puisse atteindre une hauteur où la pression est

de 152 millimètres et la température de 60° (on ne tiendra pas compte de la poussée de l'air sur les accessoires).
soit x kilos le poids de l'enveloppe; la température initiale n'étant pas indiquée, nous devons la supposer de 0°. Il n'est pas indiqué non plus si le ballon est ouvert pour éviter la rupture de l'enveloppe sous la pression de l'hydrogène quand le ballon monte. Il s'agit ici d'un problème purement théorique dont l'énoncé semble au contraire écarter cette hypothèse.

Écrivons donc que la poussée de l'air à la hauteur et à la température considérée est au moins égale au poids de l'aérostat, lequel poids reste constant.

$$60 \times \frac{152}{760} \times \frac{1}{1 + \frac{60}{273}} \times 1{,}293 > 60 \times 1{,}293 \times 0{,}07 + x$$

$$x < 60 \times 1{,}293\left(\frac{1}{5} \times \frac{91}{111} - 0{,}07\right) = 11^{\text{kg}}{,}04.$$

RELATIONS MÉTRIQUES
ET TRIGONOMÉTRIQUES
ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES
DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **Lecocq**, ancien professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, 1897; p. 174).

Note 1

Cette note se rattache au paragraphe 16.

De $$\frac{\sqrt{abcd}}{S} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \delta^2}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}\sqrt{\delta^2 - \beta^2}\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2},$$

on conclut :

$$\frac{abcd - S^2}{S^2} = \frac{(\alpha^2 + \delta^2)(\beta^2 + \gamma^2)(r'^2 - r''^2)\left[(d-b)^2 - (a-c)^2\right]}{16\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2};$$

r' et r'' étant les distances de L aux côtés opposés; a, c ou b, d.

On a donc

$$\frac{abcd - S^2}{S^2} = \frac{(r'^2 - r''^2)(a + d - b - c)(d + c - a - b)}{16r'^2r''^2}.$$

Ainsi $S = \sqrt{abcd}$ dans l'un ou l'autre des cas suivants :

1° Si $r' = r''$ (quadrilatère inscriptible et circonscriptible).

2° Si $d + c = a + b$, ou $a + d = b + c$ (inscriptible).

En particulier si, par les foyers d'une ellipse, on fait passer un cercle qui la coupe en quatre points réels, l'un des quadrilatères symétriques inscrits déterminés aura pour surface la racine carrée du produit des quatre rayons vecteurs.

Note 2

Maximum de la surface du quadrilatère ABCD (*fig.* 5) *les points* S, Q *et* O *restant fixes.*

Soit O′ le milieu de OI et $OI = 2r$.

$$\widehat{O'MP} = \xi \qquad \widehat{O'ML} = \varphi \qquad MO' = D \qquad \text{et } \operatorname{tg}\varphi = x,$$

la surface $S = 2f \times LP'$ devient :

$$S = 2\mu \sin(\xi + \varphi)\sqrt{r^2 - D^2\sin^2\varphi},$$

φ varie de $-\operatorname{arc}\sin\frac{r}{D}$ à $+\operatorname{arc}\sin\frac{r}{D}$ de droite à gauche.

L'équation du maximum est :

$$\operatorname{tg}\xi(D^2 - r^2)x^3 - (2D^2 - r^2)x^2 - \operatorname{tg}\xi\,(D^2 + r^2)x + r^2 = 0,$$

pour $x = 0$ le premier membre se réduit à $+ r^2$.

Le maximum ne correspond pas à $\varphi = 0$, ce qui est évident *a priori*, car depuis $\varphi = -\operatorname{arc}\sin\frac{r}{D}$ jusqu'à 0, les deux facteurs f et LP′ augmentent tous les deux. Or, pour $\varphi = 0$ la différentielle $d(f)$ est nulle ou au moins du second ordre, tandis que $d(LP')$ est du premier.

L'angle OMO′, valeur particulière de φ, est donné par

$$\frac{r}{\sin\varphi} = \frac{D}{\cos(\xi + \varphi)} \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{r\cos\xi}{D + r\sin\xi},$$

posons enfin

$$\frac{r}{D} = \lambda \quad \text{d'où} \quad x = \frac{\lambda \cos \xi}{1 + \lambda \sin \xi},$$

et l'équation devient :

$$\operatorname{tg} \xi (1 - \lambda^2)x^3 - (2 - \lambda^2)x^2 - \operatorname{tg} \xi (1 + \lambda^2)x + \lambda^2 = 0.$$

Substituons à x la valeur particulière ci-dessus, on trouvera le résultat essentiellement négatif, quel que soit ξ, de 0 à π et sous la condition : $r < D$

$$-\frac{r(D^2 - r^2)(r + D \sin \xi)}{D(D + r \sin \xi)^3}.$$

Donc, la position du maximum est intermédiaire entre celle où l'une des diagonales est le diamètre sur PO du cercle circonscrit, et celle où les diagonales sont rectangulaires; mais elle ne correspond pas au cas où le quadrilatère serait circonscriptible; autrement dit : c'est dans l'angle OMO′, en dehors duquel se trouve le point ω, que tombe la direction de la droite qui, partant de M, coupe le cercle de diamètre OI aux milieux des diagonales du quadrilatère maximum. (Excepté le cas où SP = QP).

CERCLES ET DROITES ALLOTROPES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite*, 1897, page 193)

---

66. — Tout point du second axe d'une conique est le centre d'un cercle bitangent à contacts réels ou imaginaires. Il en est de même de ceux des points du premier axe qui, dans l'ellipse, se trouvent entre les deux foyers, ou, dans l'hyperbole, sur l'un des prolongements de la distance focale. Il nous reste à considérer les autres points du premier axe.

Appelons *cercle allotrope* tout cercle ayant un de ces points pour centre, et dont le rayon soit, avec la moyenne proportionnelle entre les distances du même point aux foyers, dans le rapport de b à c. Prenons, comme *saillant allotrope*, le conjugué harmonique du centre du cercle par rapport aux foyers, et, comme *droite allotrope*, la *sypolaire* du saillant, c'est-à-dire la symétrique de sa polaire par rapport au centre du cercle. On peut établir les

propriétés des lignes ainsi définies par une méthode analogue à celle qui a été suivie dans l'étude des cercles bitangents de première espèce à contacts imaginaires [**32**]; c'est pourquoi nous nous bornerons à énoncer, sans démonstration, les principales d'entre elles. A cet effet, nous sommes encore obligés d'avoir recours à une locution nouvelle, celle d'*élongation d'un point par rapport à un cercle :* nous désignerons ainsi la longueur de la droite joignant ce point à l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire à celui sur lequel il est situé. Quant aux *nœuds d'élongation* d'une droite et d'un cercle, ce seront les extrémités de la corde commune aux circonférences qui ont pour centres les divers points de la droite, et, pour rayons, les élongations de ces points.

La sypolaire, dans un cercle allotrope, de tout point de la droite allotrope correspondante, coïncide avec la polaire du même point dans la conique, et passe par le saillant.

Le pôle d'une droite quelconque par rapport à la conique et le sypôle de la même droite par rapport au cercle sont en ligne droite avec le saillant. Nous entendons, par sypôle d'une droite, le symétrique, par rapport au centre du cercle, du pôle de cette droite, ou le point dont elle est la sypolaire.

La polaire d'un point quelconque du plan dans la conique, et la sypolaire du même point dans le cercle se coupent sur la droite allotrope.

De chacun des nœuds d'élongation d'une tangente à la conique par rapport à un cercle allotrope, on voit sous un angle droit la portion de cette tangente comprise entre le point de contact et la droite allotrope.

Le lieu des nœuds d'élongation d'une même tangente à la conique par rapport aux divers cercles allotropes se trouve sur les droites dont chacune passe par le point de contact et par l'un des foyers. Il constitue les portions de ces droites non occupées par le lieu des nœuds [**7**] de la même tangente et des cercles bitangents.

Il y a un rapport constant, égal à l'excentrité, entre l'élongation d'un point quelconque de la conique par rapport à un cercle allotrope et la distance du même point à la droite allotrope correspondante.

Si l'on décrit des circonférences dont chacune ait, pour diamètre,

la portion de l'axe focale comprise entre les centres de similitude de deux cercles allotropes, le second axe de la conique sera l'axe radical de deux quelconques de ces circonférences, et les foyers seront leurs nœuds [7] par rapport à cet axe.

DE L'ÉLONGATION

67. — Les notions qui vont suivre ne sont pas étrangères à la théorie des cercles bitangents aux coniques : une fois admises, elles permettraient d'exposer cette théorie un peu plus simplement ; en outre, elles conduisent à étendre, avec des énoncés convenablement modifiés, certaines propriétés des cercles bitangents et des cercles allotropes à d'autres cercles ayant aussi leurs centres sur les axes.

DIVISIONS SYHARMONIQUES

68. — Nous disons que deux segments d'une même droite forment une *division syharmonique*, lorsqu'en substituant, à une extrémité de l'un, son symétrique par rapport au milieu de l'autre, on obtient une division harmonique. Le *segment primitif* est celui qui ne se trouve pas modifié par cette substitution ; l'autre est le *segment secondaire*. Par exemple, sur la droite qui passe par le centre d'un cercle et par un point donné, ce point, sa sypolaire et la circonférence déterminent une division syharmonique, dans laquelle le diamètre intercepté constitue le segment primitif.

Dans toute division syharmonique, les deux segments empiètent l'un sur l'autre, et le milieu du segment primitif se trouve toujours sur le segment secondaire.

69. — *Le produit des distances aux extrémités du segment secondaire est le même pour les deux extrémités du segment primitif.*

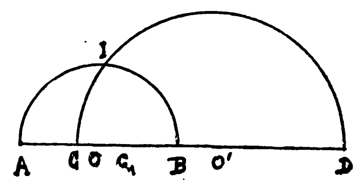


Fig. 36

Soient AB (*fig.* 36) le segment primitif, O son milieu, CD l'autre segment, C_1 le symétrique de C par rapport à O. Les points C_1, D étant conjugués harmoniques de A, B, les distances BC_1, BD sont propor-

tionnelles à AC_1, AD. Remplaçant, dans la proportion, BC_1 par son égal AC, et AC_1 par son égal BC, on obtient

$$AC.AD = BC.BD.$$

Réciproquement, si les deux segments AB, CD empiètent l'un sur l'autre, et si l'égalité précédente se trouve satisfaite, AB sera le segment primitif et CD le segment secondaire d'une même division syharmonique.

70. — *La moitié du segment primitif est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu aux extrémités de l'autre segment.*

On a en effet (*fig.* 36) $\overline{OA}^2 = OC_1 . OD$ et $OC_1 = OC$; d'où résulte

$$\overline{AO}^2 = OC.OD.$$

Réciproquement, si le milieu O de AB se trouve sur CD, et si OA est moyenne proportionnelle entre OC et OD, le segment CD formera avec AB une division syharmonique.

71. — *La corde commune aux circonférences décrites sur les deux segments comme diamètres est égale au segment primitif, et passe par le milieu de ce segment.*

Au point O (*fig.* 36), élevons, sur AB, la perpendiculaire OI égale à OA. D'après la propriété précédente, OI est moyenne proportionnelle entre OC et OD ; le point I appartient donc à la circonférence décrite sur CD comme diamètre.

Le segment secondaire est toujours plus grand que le segment primitif.

72. — *Le carré de la moitié du segment secondaire est moyenne arithmétique entre les carrés des distances du milieu de ce segment aux extrémités du segment primitif.*

Soit O′ (*fig.* 36) le milieu de CD ; tirons O′I. On peut d'abord remarquer, dans le triangle rectangle OIO′, que le carré du demi-segment secondaire est la somme des carrés du demi-segment primitif et de la distance mutuelle des milieux des deux segments; ainsi l'on a

$$\overline{O'C}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OO'}^2.$$

Le point O′ se trouvera tantôt sur OB, tantôt sur le prolongement de OB; dans chacun des deux cas, l'une des longueurs OA, OO′ sera égale à la demi-différence et l'autre à la demi-somme des distances O′A, O′B; il vient donc

$$\overline{O'C}^2 = \frac{\overline{O'A}^2 + \overline{O'B}^2}{2}.$$

73. — Problèmes : *Connaissant un segment d'une division syharmonique ainsi qu'une des extrémités ou le milieu de l'autre segment, construire ce dernier.*

Deux segments étant donnés sur une droite, en construire un troisième qui forme, avec eux, deux divisions syharmoniques, ou, *avec l'un, une division harmonique, et, avec l'autre, une division syharmonique.*

L'énoncé du second alinéa comprend cinq problèmes distincts, dont trois admettent chacun une solution unique. Les deux autres, quand ils sont possibles, admettent chacun deux solutions susceptibles de se confondre; ces derniers sont ceux dans lesquels un des segments donnés, et un seul, doit jouer le rôle de segment secondaire. Le milieu du segment cherché se trouve alors sur une circonférence, lieu des points ayant des puissances égales et de signes contraires par rapport à deux cercles, ou par rapport à un cercle et à un point connus.

Deux segments secondaires d'un même primitif empiètent toujours l'un sur l'autre.

(*A suivre*)

CORRECTION
ET CLASSEMENT DES COPIES

Le Comité du journal corrige, annote, *classe* et retourne *franco* les copies que les abonnés à la *Correction des copies* lui enverront mensuellement. Les copies et épures doivent être envoyées *franco* de port dans le mois qui suit la publication des questions proposées au journal par le Comité.

PRIX DE L'ABONNEMENT A LA CORRECTION. . **10** fr. »»

Peuvent s'abonner non seulement les abonnés du journal, mais encore tous ceux qui désireront prendre part à la correction comparative.

Les copies et le montant de l'abonnement doivent être adressés à M. MARIAUD, président du Comité, 3 rue Duban, Paris-Passy.

NOTA. — Tous les modes de payement sont admis : mandats-poste français, chèques, timbres-poste...

M. Mariaud se tient à disposition des lecteurs du *Journal de Mathématiques* et des abonnées à la correction tous les semedis de 7 heures à 11 heures du matin à son domicile, pour tous renseignements relatifs aux examens, concours et Ecoles du Gouvernement.

On peut demander ces renseignements par correspondance.

Le Président du Comité,
GEORGES MARIAUD.

Le Directeur-gérant,
GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées par le Comité aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^T-CYR

ÉCRIT

MATHÉMATIQUES

36. — On donne une circonférence O et deux rayons rectangulaires fixes OA et OB. On considère un rayon variable OC qui décrit l'angle AOB et sur lequel on prend OM égal à la distance CD de C à OA.

On demande :

1° Le lieu de M;

2° Le lieu de l'intersection des médianes du triangle OBM.

37. — On donne une surface conique de révolution à deux nappes dont le demi angle au sommet est 60°. On la coupe par deux plans perpendiculaires à l'axe et dont la distance est h. On obtient ainsi un tronc de cône. Calculer la distance x du sommet à la base la plus éloignée, sachant que le volume de ce tronc est dans un rapport donné m avec celui de la sphère dont le diamètre est h. Discussion.

ÉPURE

38. — Cadre 27 centimètres sur 45 centimètres. $\alpha\beta$ parallèle aux grands côtés du cadre;

αX = 5 millimètres; $\alpha\gamma$ = 65 millimètres; $\gamma\delta$ = 90 millimètres; $o\gamma$ = 38 millimètres; $c\delta$ = 34 millimètres.

Un cylindre a pour base dans le plan horizontal un cercle o. Les génératrices ont leurs projections horizontales parallèles à ob; ab étant le côté du pentagone régulier inscrit.

Un prisme a pour base dans le plan horizontal un carré inscrit dans la circonférence c; un des sommets du carré est le point δ. Les projections des arêtes sont perpendiculaires à ob, ces deux solides sont limités à un même plan horizontal passant par le point M situé sur la génératrice du cylindre qui passe en b, la projection m de M est telle que bm = 18 centimètres.

Un plan parallèle aux arêtes du prisme et aux génératrices du cylindre a sa trace horizontale parallèle à $\alpha\beta$.

1° On demande de représenter la projection horizontale de l'ensemble des deux solides formant un seul corps opaque.

2° On représentera le cylindre entaillé en le transportant parallèlement aux petits côtés du cadre de 130 millimètres.

3° On représentera le prisme entaillé en le transportant parallèlement aux grands côtés du cadre de 215 millimètres.

4° On représentera le solide commun transporté de 215 millimètres parallèlement aux grands côtés du cadre et de 120 millimètres parallèlement aux petits côtés.

CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE

1° La projection d'un segment de droite ayant $12\,841^{m},50$ pour longueur, mesure $8\,210^{m},63$; on demande de calculer l'angle du segment avec l'axe de projection.

2° Un point B a pour coordonnées

$$x = 2\,841^{m},35,$$
$$y = 10\,432^{m},50.$$

On demande de calculer les éléments du triangle AOB.

QUESTIONS AYANT ÉTÉ PROPOSÉES A L'ORAL

A RÉSOUDRE PAR LES CANDIDATS

40. — Peut-on mener une sphère tangente aux six arêtes d'un tétraèdre. — Discussion.

41. — On donne une demi-circonférence de diamètre AOB. Sur le diamètre AB ou sur son prolongement on donne un point S, déterminer dans la demi-circonférence une corde CD, parallèle à AB, et telle que les surfaces engendrées par la rotation, autour de AB des droites SC et CD soient proportionnelles. — Discussion.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

42. — Etant donnée une circonférence tangente aux deux côtés d'un angle de 60° mener une troisième tangente qui forme avec

les deux autres une surface égale à $5\pi R^2$. Discussion. — Cas du maximum et du minimum.

LÉOPOLD MASSIP,
Professeur à la
« Société d'enseignement moderne ».

43. — Inscrire dans une sphère un cône ayant pour base AB et dont le volume soit égal à celui du segment ABCD.

44. — Calculer à 0,001 près le rapport

$$\frac{\sin 75° + \sin 30}{\sin 75 - \sin 30}.$$

PHYSIQUE ET CHIMIE

45. — Un ballon de volume V renferme un gaz de densité d à la pression H. Un second ballon de volume V′ renferme un autre gaz de densité d' à la pression H′. On met les deux ballons en communication et l'on demande de calculer : 1° la force élastique du mélange, 2° le rapport entre les poids des deux gaz qu'il contient.

Données numériques :

$V = 10^l \quad V' = 3^l \quad d = 1$ (air), $\quad d' = 0{,}069$ (hydrogène)
$H = 380$ millimètres, $\quad H' = 2$ atmosphères.

46. — Définition de la densité des corps solides. — Méthode du flacon pour la déterminer.

47. — Préparations et usages du soufre.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES MATHÉMATIQUES

MATHÉMATIQUES

48. — (*Obligatoire*). Etant donnée une progression géométrique de raison x, on considère trois termes consécutifs de cette progression. On fait leur somme puis de cette somme on retranche le terme du milieu. Etudier la variation du rapport de la première expression à la seconde quand x varie.

49. — (*Au choix*). Théorie du plan incliné.

50. — Conditions de sensibilité et de justesse de la balance.

51. — Bascule de Quintenz.

PHYSIQUE

57. — (*Obligatoire*). Deux sphères métalliques, dont les densités sont 5 et 10 ont même poids P dans le vide. On les suspend aux extrémités d'un levier et on les fait plonger dans l'eau. Quel doit être le rapport $\frac{l}{l'}$ des deux bras de levier pour qu'il y ait équilibre.

58. — (*Au choix*). Démontrer le principe d'Archimède.

59. — Conditions d'équilibre des corps flottants.

60. — Détermination expérimentale du volume d'un corps solide.

IV. — AU BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT MODERNE

MATHÉMATIQUES

61. — (*Obligatoire*). x variant de $-\infty$ à $+\infty$, étudier les variations de :

$$\frac{3x^2 - 8x + 7}{5n^2 + 4x + 2}.$$

62. — (*Au choix*). Composition de deux forces parallèles et de sens contraires.

63. — Valeur en grandeur et en direction de la résultante de deux forces concourantes.

64. — Montrer qu'un couple ne peut avoir de résultante.

PHYSIQUE

65. — (*Obligatoire*). Un aréomètre à graduation uniforme (genre Baumé) marque 0 degré dans l'eau pure à 0 degré, 40 degrés dans un certain liquide de densité 1,52 à la même température. A quelle division affluera-t-il dans ce dernier liquide à la température de 60 degrés?

Le coefficient de dilatation cubique du verre est 0,000026 ; celui du liquide 0,000836.

On néglige les effets de capillarité et l'on admet que la densité de l'eau à 0° ne diffère pas sensiblement de 1.

66. — (*Au choix*) *a*). Spectres solaires. — Spectres des différentes sources lumineuses.

b) Chaleur rayonnante. — Emission, réflexion, transmission et absorption.

c) Principes de la photométrie. — On donnera un exemple de comparaison de deux sources lumineuses, au moyen d'un photomètre seulement.

V. BACCALAURÉAT (LETTRES. — SCIENCES)

MATHÉMATIQUES

67. — (*Obligatoire*) a et b, étant les coordonnées d'un point M et

$$(1) \qquad (a+2)x + (a+3b+5)y + 3 = 0,$$
$$(2) \qquad (a+2)x - (2a+b-2)y - 2 = 0,$$

les équations de deux droites rapportées aux mêmes axes rectangulaires, trouver le lieu des positions que doit occuper le point M dans le plan pour que ses coordonnées mises dans les équations (1) et (2) les deux droites qu'elles représentent soient parallèles. Trouver les coordonnées du point M pour lesquelles les deux droites coïncident.

68. — (*Au choix*). 1° Définition d'une fonction continue d'une variable et démontrer que la fonction $y = ax^2 + bx + c$ est continue de $-\infty$ à $+\infty$.

2° Indiquer comment on représente une droite et un plan en géométrie cotée, et, trouver l'intersection d'une droite et d'un plan donnés en projections cotées par leurs échelles de pente.

3° Ramener à un système de trois forces passant par trois points choisis arbitrairement dans un corps solide, un système de n forces appliquées en différents points de ce corps solide. Puis ramener ce système de trois forces à un autre de deux forces dont l'une passe par l'un des trois points précédents.

PHYSIQUE

69. — (*Obligatoire*). On manœuvre le piston d'une machine pneumatique. Le récipient est rempli d'air à la pression de 760 millimètres de mercure et à la température de 0°. Le volume de ce récipient est de 7 530 centimètres cubes. On demande : 1° le poids de l'air extrait quand la pression est réduite à 84 millimètres; 2° le poids de l'air contenu dans le récipient à la même pression (poids du litre d'air à 0°, sous la pression de une atmosphère : 1gr,293.

70. — (*Au choix*). 1° Lois de la chute des corps et machine d'Atwood;

2° Pendule. — Applications;

3° Poids spécifiques des solides.

VI. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

71. — *a*) Dans un hôtel des monnaies on a frappé de la monnaie d'argent pour une valeur de 100 000 francs. Les $\frac{19}{20}$ de cette fabrication sont en pièces de 5 francs, au titre de 900 millièmes, le reste est fabriqué en pièces divisionnaires. On demande : 1° le poids de l'argent pur employé; 2° le montant des frais de fabrication des pièces de 5 francs au tarif de 1fr,50 par kilogramme d'argent monnayé.

72. — *b*) Les volumes engendrés par un rectangle tournant successivement autour de ses côtés sont de 10 mètres cubes et de 19 mètres cubes. Trouver la longueur de la diagonale de ce rectangle.

73. — *c*) Calculer par logarithmes

$$x = \frac{\sqrt[7]{\overline{2,35}^3}\ 0,001 . \left(\frac{372}{25}\right)^2}{\sqrt[3]{89\,543}}.$$

VII. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

ÉCOLES SUPÉRIEURES DE COMMERCE RECONNUES PAR L'ÉTAT

CONCOURS D'ENTRÉE DU 11 OCTOBRE 1897

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(3 HEURES)

I. — ARITHMÉTIQUE

I. Trois lingots d'argent ont pour titres : 0,95 pour le premier, 0,80 pour le second et 0,53 pour le troisième.

Le poids du premier lingot et le poids du second sont proportionnels à 4 et à 5.

Le poids du troisième lingot est triple du poids du second lingot.

Les trois lingots fondus ensemble forment un lingot total pesant 2880 grammes.

On demande :

1° Quel poids de cuivre ou quel poids d'argent pur faut-il ajouter au lingot total pour fabriquer un alliage pouvant servir à frapper des pièces de 1 franc en argent ?

2° Quel sera le nombre de pièces de 1 franc frappées ?

II. Un commanditaire a placé dans une maison de commerce une certaine somme d'argent à intérêts simples à un certain taux.

Si la commandite était retirée au bout de 11 mois, le commanditaire toucherait 69 664 francs. Si la commandite était retirée au bout de deux ans et demi, le commanditaire toucherait 73 920 francs.

Calculer la somme placée et déterminer le taux du placement.

Nota. — La résolution de ces problèmes par l'arithmétique est obligatoire ; toute solution algébrique sera considérée comme nulle. Les candidats sont astreints à faire figurer tous les calculs *en marge de la copie.*

II. — ALGÈBRE

Démontrer que l'équation

$$\frac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 9x + 14} = \frac{x-4}{x-2},$$

est une identité.

III. — CALCUL LOGARITHMIQUE

$$\sqrt[7]{\left[\frac{6878^3 \times \sqrt[3]{0{,}01}}{\frac{5}{7} \times 725^6 \times \sqrt{0{,}678}}\right]^4}$$

Chaque candidat calculera cette expression avec l'approximation que comporte la table dont il se sert.

Il sera tenu compte de la bonne disposition et de l'ordre des calculs.

DEUXIÈME PARTIE

Pour mémoire. — Cette partie sera remplie à partir du prochain numéro.

TROISIÈME PARTIE

Questions diverses

CERCLES ET DROITES ALLOTROPES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite*, voir le numéro d'octobre)

L'ÉLONGATION PAR RADIANT

74. — Un point, dit *radiant*, et un cercle fixe étant donnés, nous appelons *élongation* d'un point variable le rayon du cercle qui a ce point pour centre, et dont l'axe radical, par rapport au cercle fixe, est issu du radiant. Pour chaque position du point variable, l'axe radical est déterminé, puisqu'il doit être perpendiculaire à la droite passant par ce point et par le centre du cercle fixe.

Lorsque l'axe radical rencontre le cercle fixe, l'élongation est égale à la droite qui joint le point variable à l'une des extrémités de la corde d'intersection. Supposons que l'axe radical soit extérieur au cercle fixe; construisons leurs nœuds [**7**], lesquels devront être les mêmes que pour l'axe radical et le cercle variable. Si le point variable est en dehors du *cercle nodal*, c'est-à-dire du cercle décrit sur la ligne des nœuds comme diamètre, la tangente menée de ce point à ce cercle donnera l'élongation. Dans le cas contraire, au lieu de considérer l'élongation, qui serait imaginaire, nous considérerons, sous le nom de *corde d'élongation*, la corde principale du point variable dans le cercle nodal. Dans les deux cas, la puissance du point variable par rapport à ce cercle sera sa *puissance d'élongation*.

L'élongation sera dite *centrale* lorsque le radiant occupera le centre du cercle fixe. Le mode particulier d'élongation ainsi défini est celui que nous avons déjà rencontré dans l'étude des cercles allotropes [**66**].

75. — *L'axe radical de deux cercles variables passe par le radiant.*

Ces deux cercles, avec le cercle fixe, ont en effet le radiant pour centre radical.

Il suit de là que, si le point variable décrit une ligne droite, les cercles variables, pris deux à deux, auront le même axe radical. Lorsque l'un d'entre eux sera rencontré par cet axe, ils le seront tous, et aux mêmes points, que nous appellerons *nœuds d'élongation*. On peut obtenir ces nœuds en abaissant, du radiant, une perpendiculaire sur la droite des points variables, et prenant ses intersections avec la circonférence qui a son centre au pied de cette perpendiculaire. Les nœuds une fois construits, pour avoir l'élongation d'un point quelconque de la droite, il suffira de le joindre à l'un des nœuds.

76. Lemme. — *L'axe radical de deux cercles est équidistant des polaires de leurs centres*, la polaire du centre de chaque cercle étant prise par rapport à l'autre cercle.

En effet, la distance du milieu de la ligne des centres à l'axe radical et la distance du même point à la droite équidistante des deux polaires sont toutes deux égales au demi-quotient de la différence des carrés des rayons par la distance des centres.

77. — *Quand le radiant et le centre du cercle fixe se trouvent sur une même perpendiculaire à la droite des points variables, les nœuds d'élongation forment une division harmonique avec le centre du cercle fixe et le symétrique, par rapport au radiant, du pôle de la droite dans ce cercle.*

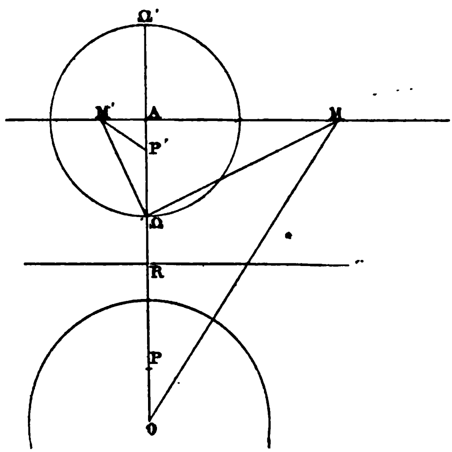


Fig. 37

Soient O (*fig.* 37) le centre du cercle fixe, AM la droite des points variables, A le pied de et la perpendiculaire abaissée de O sur AM, R le radiant, RS la perpendiculaire élevée en R sur OA. Les nœuds d'élongation Ω, Ω' se trouveront sur la circonférence variable de centre A, c'est-à-dire celle qui, avec le cercle fixe, aurait pour axe radical RS. Soient encore P le point de rencontre de OA avec la polaire de A dans le cercle fixe, et P' le symétrique de P par rapport à R. D'après le lemne précédent, P' appartiendra à la polaire de O dans la circonférence variable de centre A ; les points Ω, Ω' de cette circonférence sont donc conjugués harmoniques des points O, P'.

78. — *Quand le radiant et le centre du cercle fixe se trouvent sur une même perpendiculaire à la droite des points variables, on voit sous un angle droit, de chaque nœud d'élongation, la portion de la droite comprise entre l'un quelconque de ses points et la symétrique, par rapport au radiant, de la polaire de ce point.*

La polaire d'un point quelconque M (*fig.* 37) de la droite AM serait la perpendiculaire abaissée de P sur OM ; sa symétrique par rapport à R sera P'M' perpendiculaire aussi à OM ; M' étant le

point de rencontre de P'M' avec AM, il s'agit de démontrer que l'angle MΩM' est droit. Puisque les deux segments ΩΩ', OP' sont conjugués harmoniques [**77**], on a $\overline{A\Omega}^2 = AO.AP'$; mais les deux triangles semblables AOM, AM'P' donnent $AO.AP' = AM.AM'$; il vient donc $\overline{A\Omega}^2 = AM.AM'$, ce qui prouve que le triangle MΩM' est rectangle en Ω.

79. — Les nœuds tels qu'ils ont été définis à propos des cercles bitangents de première espèce [**7**], à propos des cercles bitangents de seconde espèce [**39**], enfin à propos des cercles allotropes [**66**], répondent à trois positions particulières du radiant sur la perpendiculaire menée à la droite des points variables par le centre du cercle fixe.

1° La droite AM (*fig.* 38) étant extérieure au cercle, prenons son pôle P pour radiant. Les tangentes aux extrémités de toute corde passant par P se coupant sur AM, l'élongation d'un point quelconque de AM sera la tangente menée de ce point au cercle fixe.

Ici, les nœuds Ω, Ω' sont conjugués harmoniques de O, P [**77**]. Ils le sont aussi des extrémités C, D du diamètre perpendiculaire à AM, car, B désignant l'une des extrémités de la corde principale de P, ou, ce qui revient au même, le point de contact de l'une des tangentes issues de A, on aura $\overline{A\Omega}^2 = \overline{AB}^2 = AC.AD$.

De chaque nœud, on voit sous un angle droit la portion de la droite comprise entre l'un quelconque de ses points et la polaire de ce point dans le cercle [**78**].

2° La droite AM (*fig.* 39) rencontrant le cercle, prenons, pour radiant, le pied A de la perpendiculaire abaissée, sur cette droite, du centre O du cercle fixe. L'élongation de A sera la demi-corde principale AB, et les nœuds se trouveront en Ω, Ω', à des distances

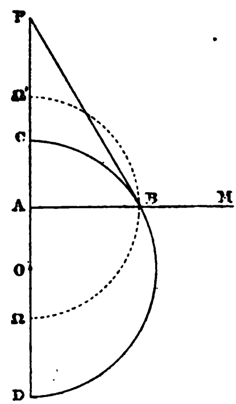


Fig. 39.

de A égales à AB. Ils formeront avec O et le symétrique, par rap-

port à A, du pôle P de AB, une division harmonique [**77**]; par conséquent ils occupent les extrémités du segment primitif dans une division syharmonique dont le segment secondaire est OP. Ils jouent le même rôle dans une autre division syharmonique ayant, pour segment secondaire, le diamètre CD perpendiculaire à AM. On a en effet $\overline{A\Omega}^2 = \overline{AB}^2 = AC.AD$.

De chaque nœud, on voit sous un angle droit la portion de la droite comprise entre l'un quelconque de ses points et la symétrique de la polaire de ce point par rapport au pied de la perpendiculaire abaissée du centre du cercle fixe sur la droite [**78**].

3° Quelles que soient les positions relatives de AM (*fig.* 40) et du cercle fixe, prenons, pour radiant, le centre O de ce cercle, ce qui correspond à l'élongation centrale. Si B est l'une des extrémités du diamètre parallèle à AM, l'élongation de A sera égale à AB, et les nœuds Ω, Ω' se trouveront à des distances de A égales aussi à AB. Soit P le pôle de AM; prenons $OP' = OP$; Ω, Ω' seront conjugués harmoniques de O, P' [**77**]; ils forment donc une division harmonique avec le centre du cercle et le sypôle de la droite. La ligne $\Omega\Omega'$, qui les joint, est aussi le segment secondaire d'une division syharmonique ayant pour segment primitif le diamètre CD perpendiculaire à AM; on a en effet $\overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 = O\Omega.O\Omega'$.

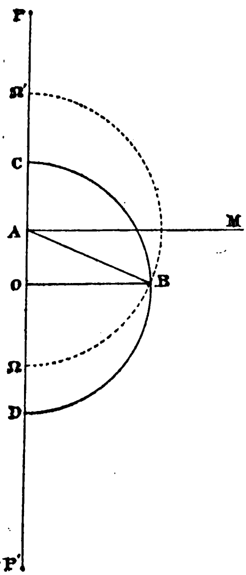


Fig. 40.

De chaque nœud, on voit sous un angle droit la portion de la droite comprise entre l'un quelconque de ses points et la sypolaire de ce point dans le cercle [**78**].

80. — L'emploi des nœuds nous a facilité la démonstration des propriétés des cercles bitangents aux coniques; il conduit à la résolution de divers problèmes relatifs à ces cercles; enfin, il

fournit des réponses immédiates aux questions dans lesquelles il s'agit des élongations de deux points seulement ou de celles de plusieurs points appartenant à une même droite. Pour énoncer plus rapidement quelques-unes de ces questions prises comme exemples, nous supposerons que *la droite ne rencontre pas le cercle*, et que le radiant coïncide avec le pôle de cette droite, de sorte que l'élongation de chaque point sera la tangente qui en est issue.

Démontrer que la distance de deux points est comprise entre la somme et la différence des tangentes menées de ces points à un même cercle.

Étant donnés deux cercles et une droite, trouver le point de cette droite pour lequel la somme des tangentes menées aux deux cercles est la plus petite possible, et celui pour lequel la différence des tangentes est la plus grande possible.

Démontrer que le carré de la distance de deux points situés chacun sur la polaire de l'autre par rapport à un cercle est égal à la somme des carrés des tangentes issues de ces deux points.

Former la relation qui doit exister entre les distances mutuelles de trois points en ligne droite et les longueurs des tangentes menées de ces points à un même cercle.

81. — *Le lieu des points d'égale élongation par rapport à deux cercles fixes est une droite perpendiculaire à celle qui joint les deux radiants.*

En effet, considérons deux points du lieu, les cercles variables décrits de ces points comme centres avec leurs élongations pour rayons, enfin la droite qui les joint. L'axe radical des deux cercles variables doit contenir les deux radiants [**75**]; deux points quelconques du lieu se trouvent donc sur une même perpendiculaire à la droite des radiants.

Dans le cas des élongations centrales, le lieu des points d'égale élongation est symétrique de l'axe radical des deux cercles donnés par rapport au milieu de la distance de leurs centres.

Les lieux des points d'égale élongation par rapport à trois cercles et à trois radiants pris deux à deux se coupent en un même point.

L'intersection des deux axes radicaux qui correspondent à tout

point d'égale élongation par rapport à deux cercles fixes se trouve sur l'axe radical de ces deux cercles.

Lorsque les deux radiants se confondent, tout point du plan a la même élongation par rapport à deux cercles donnés, ou aucun point ne jouit de cette propriété, suivant que le radiant commun est ou non situé sur l'axe radical des deux cercles.

82. — *Lorsque deux circonférences sont orthogonales, il y a égalité entre la puissance d'un point quelconque du plan par rapport à l'une et la puissance d'élongation du même point par rapport à l'autre et au centre de la première pris comme radiant.*

Soient O (*fig.* 41) le centre de la première circonférence, O′ celui de la seconde, M le point considéré. Du radiant O, abaissons, sur O′M, la perpendiculaire ON et supposons d'abord que cette perpendiculaire rencontre la seconde circonférence ; si E est un des points d'intersection, M aura pour élongation ME.

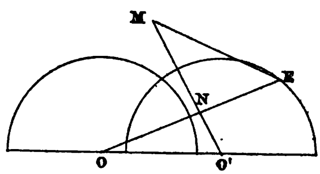


Fig. 41.

Les deux cercles se coupent orthogonalement, O′ appartient à l'axe radical du premier et du point E ; cet axe radical est donc O′N, et, comme O′N contient M, la distance ME sera égale à la tangente menée de M à la première circonférence.

Supposons maintenant que ON (*fig.* 42) ne rencontre pas la seconde circonférence. Imaginons le cercle nodal qui se rapporte à cette circonférence et à ON, c'est-à-dire celui qui a N pour centre, et, pour rayon la tangente menée de N à la dite circonférence. Ce cercle et le premier des deux cercles donnés coupant orthogonalement le second, leur axe radical doit passer par O′ ; il est donc O′N, et contient M. D'après cela, M a la même puissance dans le premier cercle donné et dans le cercle

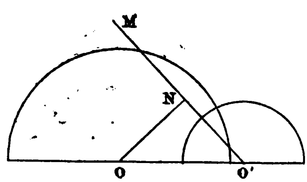


Fig. 42

nodal; or, sa puissance dans le cercle nodal est précisément sa puissance d'élongation par rapport au second cercle donné et au radiant O [**74**].

83. *Deux circonférences étant décrites, l'une sur le segment primitif, l'autre sur le segment secondaire d'une division syharmonique comme diamètres, il y aura égalité entre l'élongation centrale d'un point quelconque du plan par rapport à la première, et l'élongation du même point par rapport à la première, et l'élongation du même point par rapport à la seconde et au centre de la première pris comme radiant.*

Soient AB (*fig.* 43) le segment primif, O son milieu, CD le segment secondaire, OI la demi-corde commune aux deux circonférences, laquelle passe par O [**70**] Ce point sert de radiant pour les deux élongations et il est situé sur l'axe radical des deux cercles; donc les deux élongations sont égales [**81**].

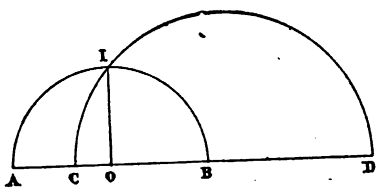


Fig. 43

84. — *Tout point de l'axe focal d'une conique, indéfiniment prolongé, est le centre d'une infinité de cercles à chacun desquels correspondent un point et une droite tels que, le point étant pris pour radiant, il y ait un rapport égal à l'exentricité entre l'élongation, par rapport au cercle, d'un point quelconque de la conique et la distance du même point à la droite.*

(*À suivre*).

CORRECTION
ET CLASSEMENT DES COPIES

Le Comité du journal corrige, annote, *classe* et retourne *franco* les copies que les abonnés à la *Correction des copies* lui enverront mensuellement.

Les copies et épures doivent être envoyées *franco* de port dans le mois qui suit la publication des questions proposées au journal par le comité.

PRIX DE L'ABONNEMENT ANNUEL A LA CORRECTION. . **10** fr. »»

Peuvent s'abonner non seulement les abonnés du journal, mais encore tous ceux qui désireront prendre part à cette correction comparative.

Les copies et le montant de l'abonnement doivent être adressés à M. MARIAUD, président du Comité, 61, rue de Passy, Paris-Passy.

NOTA. — Tous les modes de payement sont admis : mandats postes français, chèques, timbres-postes...

M. Mariaud se tient à la disposition des lecteurs du « Journal de Mathématiques » et abonnés à la correction tous les samedis de 7 heures à 11 heures du matin à son domicile, pour tous renseignements relatifs aux examens, concours et Ecoles du Gouvernement.

On peut demander ces renseignements par correspondance.

Le Président,
GEORGES MARIAUD.

Le Directeur-gérant,
GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE St-CYR

MATHÉMATIQUES

74. — Résoudre le système :

$$x^2 - y\sqrt{xy} = a^2,$$
$$y^2 - x\sqrt{xy} = b^2.$$

LÉOPOLD MASSIP,
Professeur à la
« Société d'enseignement moderne ».

75. — Trouver le lieu des points d'où l'on voit trois sphères données sous un même angle donné.

ÉPURE

76. — Un cercle de centre O dans le plan de comparaison est la base d'un cylindre oblique limité au plan vertical qui passe par CC_1 (CC_1 parallèle aux petits côtés du cadre). On donne le point B dans le plan de comparaison. Ce point est l'un des sommets du losange, circonscrit au cercle. On considère le prisme formé par les quatre plans tangents au cylindre et passant par les quatre côtés du losange; 2° un cylindre horizontal d'axe AA_1 (AA_1 parallèle aux petits côtés du cadre) est tangent au plan vertical CC_1 et limité à deux plans perpendiculaires au plan vertical qui passe par SS_1 (SS_1 parallèle aux petits côtés du cadre et placé suivant le petit axe de la feuille) et inclinés de 30° sur le plan de comparaison. On demande l'intersection du cylindre horizontal et du prisme; 2° la construction d'un point d'intersection et de la tangente en ce point.

Données numériques : Cadre, 27 centimètres sur 45 centimètres S et S_1 sont sur les côtés du cadre, l'axe du cylindre est situé dans un plan vertical perpendiculaire à SS_1 et part du point O, $O\omega = O_1\omega = 0^m,13$ (ω sur SS_1 tel que OO_1 soit perpendiculaire à SS_1).

Le rayon du cercle O est de 2 centimètres 5 millimètres BB_1

perpendiculaire à SS_1 égale 17 centimètres, $B_1S_1 = 8$ centimètres (S_1 à droite de la feuille et sur le côté du cadre). La pente de l'axe du cylindre O est 1. La côte de l'axe AA_1 du cylindre horizontal est inférieure de 3 centimètres à la côte du point O_1 (O_1 étant la trace de l'axe OO_1 sur le plan vertical CC_1. Le rayon du cercle horizontal est $0^m,045$.

LÉOPOLD MASSIP.

CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE

77. — Etant donnée l'équation :

$$89\,785 = 89\,524,67 \cos x + 24\,508,75 \sin x.$$

On propose : 1° d'établir une formule logarithmique qui fasse connaître toutes les valeurs de l'arc x.

2° De calculer ces valeurs à moins de $\frac{1}{10}$ de seconde, en écartant celles qui ne sont pas comprises dans le premier quadrant.

QUESTIONS POSÉES A L'ORAL

78. — Soit un carré. On le divise en quatre petits carrés par des parallèles aux côtes tracées suivant les axes; dans l'un des quatre carrés on inscrit un cercle tangent aux quatre côtes. Ce cercle représente un trou fait à l'emporte-pièce et si l'on suppose la figure en métal, trouver le centre de gravité du système.

79. — Résoudre l'équation

$$\sin^4 x - \sin^3 x + 2m \sin^2 x - \sin x + 1 = 0.$$

Discuter la nature des racines de cette équation suivant les diverses valeurs de m.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

80. — Déterminer les côtés d'un trapèze de périmètre donné, inscrit dans une circonférence donnée de manière que l'un de ces côtés parallèles soit un diamètre de la circonférence. Discuter la solution trouvée.

81. — Déterminer les maxima et minima des fonctions :

$$\frac{3x-2}{5x^2+1}, \quad x - 3 + \frac{4}{x-5}, \quad \frac{3x^2+1}{5x-3}, \quad \frac{a}{x} + \frac{a}{a+x}.$$

82. — Calculer les racines de l'équation

$$\log (7x - 9)^2 + \log (3x - 4)^2 = 2.$$

PHYSIQUE ET CHIMIE

83. — Un tube de verre ayant à l'intérieur la forme d'un cylindre a un diamètre intérieur de 2 millimètres à 0° et renferme une colonne de mercure, dont la longueur à cette température est de 2 décimètres. On demande quelle serait à la température de 20° la nouvelle longueur de la colonne liquide.

Le coefficient de dilatation cubique du mercure est $\frac{1}{5\,550}$, celui du verre $\frac{1}{38\,700}$.

84. — Combien faut-il mettre de fer et d'acide sulfurique monohydraté, dans des tonneaux à moitié pleins d'eau pour préparer 100 mètres cubes d'hydrogène saturé d'humidité à 22° sous la pression de 766 millimètres. La force élastique maximum de la vapeur d'eau à 22° est de $19^{mm},6$. Quel est le poids du sulfate de fer cristallisé que l'on peut obtenir par l'évaporation de la liqueur.

QUESTIONS POSÉES A L'ORAL

85. — On donne une circonférence et une tangente à cette circonférence au point A, on mène la corde BC parallèle à la tangente en A. Des points B et C on abaisse des perpendiculaires sur la tangente en A, et on détermine ainsi un rectangle dont l'un des côtés est BC, déterminer la corde BC de façon que ce rectangle ait un périmètre donné. Discuter l'équation obtenue.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES MATHÉMATIQUES

86. — (*Obligatoire*) : On considère l'arc d'une circonférence de $438^m,35$, intercepté par l'angle au centre de 45° et on le fait tourner autour de l'un des rayons qui le limitent. Calculer : 1° l'aire de la zone engendrée ; 2° le volume du secteur sphérique ; 3° le volume du segment de la sphère.

87. — (*Au choix*) : Théorie du treuil.

88. — Centre de gravité d'un arc de cercle.

89. — Théorème de Varignon.

PHYSIQUE

90. — (*Obligatoire*) : On a un cylindre d'acier de 22 centimètres de longueur qu'on voudrait lester avec un cylindre de platine de même diamètre de manière qu'il se tint verticalement flottant dans du mercure, la partie non plongée du cylindre d'acier n'étant que de 2 centimètres.

Quelle longueur faut-il donner au cylindre de platine ?

91. — (*Au choix*) : Lunette astronomique.

92. — Grossissement de la loupe.

93. — Détermination du centre optique dans les différentes lentilles.

QUESTIONS POSÉES A L'ORAL

94. — Vérifiez que si x, y, z sont en progression arithmétique, il en est de même de $x^2 + xy + y^2$, $x^2 + xz + z^2$, $y^2 + yz + z^2$.

95. — Maximum et minimum de $\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}$.

IV. — AU BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT MODERNE

96. — (*Obligatoire*) : Sur une droite AB de longueur a, on prend un point M à la distance $AM = x$. On construit sur AM le triangle équilatéral AMN ; puis on élève en N la perpendiculaire NP sur MN et, en B la perpendiculaire BP sur AB. Calculer l'aire du quadrilatère ANPB. Cette surface passe-t-elle par un maximum ou un minimum quand le point M varie entre A et B ?

97. — (*Au choix*) : Etablir la formule qui donne le volume du tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles.

98. — Volume du tronc de prisme.

99. — Mesure des angles dièdres.

PHYSIQUE

100. — (*Obligatoire*) : Un morceau de fer, plongé dans un vase plein d'eau en a fait sortir dix grammes ; mis dans un vase plein de mercure, il y flotte en déplaçant 78 centimètres cubes de ce dernier liquide. On demande le poids, le volume, la densité du morceau de fer.

101. — (*Au choix*) : Décrire la sirène.

102. — Intervales musicaux. — Gamme.

103. — Vibrations transversales des cordes ; lois expérimentales.

QUESTIONS POSÉES A L'ORAL

104. — Simplifier l'expression :

$$\frac{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} - 2xy^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} + yx^{\frac{1}{3}} - xy^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{4}{3}}}.$$

105. — Résoudre :

$$\frac{x-a}{a^2+4ab+3b^2} - \frac{x-b}{a^2-ab-6b^2} = \frac{x}{a^2-9b^2} - \frac{x+a-b}{a^2+4ab+3b^2}.$$

V. BACCALAURÉAT (LETTRES. — SCIENCES)

106. — (*Obligatoire*) : Construire les lignes qui correspondent aux formules

$$x = \sqrt{2-\sqrt{3}} \qquad x = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} \qquad x = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}.$$

107. — (*Au choix*) : Intersection d'une droite et d'une parabole.

108. — Théorème de Dandelin.

109. — Projection orthogonale du cercle.

PHYSIQUE

110. — (*Obligatoire*) : On demande quelle différence il y a entre le poids de 10 litres d'air sec à la température de 10° et à la pression de $0^m,76$ et le poids de 10 litres d'air sec à la température de 15° et à la pression de $0^m,75$. Le litre d'air sec à 0° et à la pression $0^m,76$ pèse $1^{gr},293$, le coefficient de dilatation de l'air est de 0,00367.

111. — (*Au choix*) : Machine pneumatique.

112. — Siphon.

113. — Electromètre de Thomson.

VI. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

114. — Une lampe modérateur dépense 28 grammes d'huile par heure et donne une lumière égale à celle de 6 bougies environ. L'huile vaut $1^{fr},60$ le kilog; la mèche et l'entretien coûtent $0^{fr},004$ par heure; 485 grammes de bougie donnent 50 heures d'éclairage et coûtent $1^{fr},40$.

A-t-on avantage de se servir de la lampe modérateur? et de combien par heure?

2° Une personne qui n'a besoin que de la lumière donnée par une bougie perdrait-elle en faisant usage de la lampe modérateur? et combien par heure?

115. — Les rayons de la lune, de la terre, et du soleil étant proportionnels aux nombres $\frac{3}{11}$, 1 et 708,5, trouver le rapport des distances du centre de la terre au centre des deux autres astres, lorsque l'on suppose les centres de ces 3 globes sur l'axe d'un cône de révolution qui leur est tangent; considérer le cas où les trois astres sont tangents à une même nappe, et celui où la terre étant située dans une nappe les deux autres astres sont dans la nappe opposée.

116. — Calculer par logarithmes

$$x = \frac{1}{100}.0,235879\sqrt[7]{(0,01119)^3}.$$

VII. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

117. — Un homme âgé de 30 ans possède une maison valant 200 000 francs, qui rapporte, tous frais déduits 5 °/₀ de sa valeur. Or, chaque année il dépense non seulement son revenu, mais encore il emprunte 2 000 francs à 5 °/₀. Cet homme est mort à l'âge de 72 ans. On demande combien de temps il a encore vécu après sa ruine complète?

Nota. — *La résolution des problèmes par l'arithmétique est obligatoire; toute solution algébrique est considérée comme nulle. Les candidats sont astreints à faire figurer tous les calculs en marge de la copie.*

118. — *Algèbre :* Transformer l'expression :

$$\sqrt{x^2 + x + 1 - \sqrt{2x^3 + x^2 + 2x}}$$

en un autre qui ne contienne que deux radicaux simples.

119. — Calculer par logarithmes

$$x = \left[\frac{4\sqrt[3]{573,892} - 3\sqrt[5]{678,92}}{45\sqrt{63456} - 3\sqrt[3]{6,789}}\right]^{\frac{2}{3}}.$$

DEUXIÈME PARTIE

Ont résolu les questions du numéro d'octobre :

I. *A l'École de Saint-Cyr.* — MM. de Géransac à Rouen, Martinard à Périgueux, Laplanche à Perpignan (tout l'examen), Dubuy à Rodez, Paul Lion à Tarbes (la question de mathématiques), Bardin à Lille a envoyé une épure exacte, Tarnyés à Figeac, Vincent à Beauvais (calcul trigonométrique).

II. *A l'Institut Agronomique.* — MM. Vaucant à Montpellier, Teysserac à Cambrai, Albeski à Brest, Mironyl à Bastia (tout l'examen), Maurice Destins (la question 10 seulement).

III. *Au Baccalauréat Lettres Mathématiques.* — MM. Maurice Destins, Lugan à Liège, Mock Léon à Blois (tout l'examen).

IV. *Au Baccalauréat de l'Enseignement Moderne,* — MM. Vicq à Flaujac, Brunel à Périgueux, Trespoux à Gap (tout l'examen), Maurice Destins (la question 21).

V. *Aux Écoles d'Agriculture.* — MM. Paulin Duval à Agen (tout l'examen), Tassart à Nancy, Martin à Hozelerauck (le calcul logarithmique).

Nota. — Les solutions de ces questions seront données quand le classement des abonnés à la correction des copies sera terminé.

TROISIÈME PARTIE

CERCLES ET DROITES ALLOTROPES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite et fin,* voir le numéro de novembre)

Pour construire un de ces cercles, connaissant le point de l'axe qui doit lui servir de centre, il suffit de mener à la conique un

cercle bitangent, à contacts réels ou imaginaires, ayant son centre sur le même axe, et laissant en dehors de lui le centre donné. La tangente au cercle bitangent issue de ce dernier point sera le rayon du cercle demandé. On prendra comme radiant le centre du cercle bitangent, et, pour droite correspondante, celle des contacts de ce cercle avec la conique [**82**].

Il y a une propriété analogue pour les points du second axe. Ici le rapport constant au lieu d'être égal à l'excentricité sera celui de c à b. De plus, s'il s'agit d'une ellipse, ce n'est pas l'élongation qui devra figurer dans l'énoncé, mais la demi-corde d'élongation; enfin, il y aura exception pour les points compris entre les sommets du petit axe.

Revenons aux cercles qui doivent avoir leurs centres sur l'axe focal. Pour construire chacun d'eux, au lieu d'un cercle bitangent, on peut employer un cercle allotrope; les extrémités du diamètre de ce cercle perpendiculaire à l'axe donneront des points du cercle demandé [**83**]. La droite qui correspondra au cercle obtenu sera une droite allotrope, par conséquent située en dehors ou en dedans de l'intervalle des deux directrices suivant que la courbe sera une ellipse ou une hyperbole; le contraire avait lieu pour les droites de la première solution.

Supposons encore que l'on donne deux droites perpendiculaires à l'axe focal, l'une entre les directrices, l'autre en dehors de l'intervalle de ces directrices. A chaque droite, faisons correspondre un point tel que les distances du centre de la conique à ce point et à la droite soient entre elles dans un rapport égal au carré de l'excentricité; puis, construisons le cercle bitangent et le cercle allotrope dont chacun a pour centre l'un des points ainsi obtnnus. Sur l'axe, déterminons un segment qui soit conjugué harmonique du diamètre du premier cercle et syharmonique secondaire du diamètre du second cercle; enfin, sur ce segment comme diamètre, décrivons une troisième circonférence. Par rapport à cette circonférence et à l'un ou à l'autre des deux points, pris maintenant comme radiant, l'élongation d'un point quelconque de la conique sera, avec la distance du même point à la droite correspondante, dans un rapport égal à l'excentricité.

La construction du segment à déterminer se trouve ici simplifiée parce que son milieu doit être équidistant des deux droites don-

nées. Lorsque ces droites se trouvent toutes deux en dedans ou toutes deux en dehors de l'intervalle des directrices, la question se ramène encore à l'un ou à l'autre des problèmes énoncés § **73.**

ÉLONGATION PAR POLAIRE

85. — Au lieu d'assujettir l'axe radical du cercle fixe et du cercle variable à passer par un point fixe, on peut lui imposer une autre condition, par exemple celle d'être la polaire du point variable par rapport à un cercle donné concentrique au cercle fixe, et que nous appellerons le *cercle de base.*

Dans l'élongation par radiant, le lieu du pied de l'axe radical variable, c'est-à-dire le lieu de l'intersection de cette droite avec la ligne joignant le point variable au centre du cercle fixe, était toujours une circonférence. Ici, ce lieu sera une transformée par rayons vecteurs réciproques de la courbe des points variables.

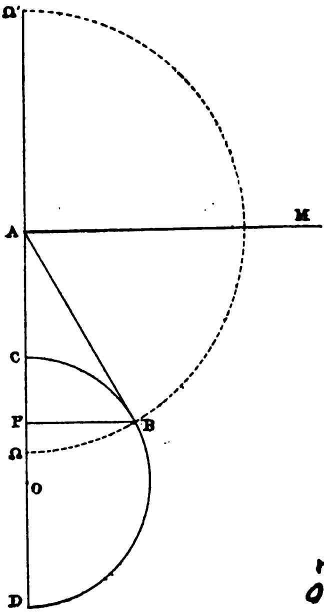
Si le cercle fixe est pris pour cercle de base, la puissance d'élongation d'un point quelconque [**74**] sera égale à sa puissance dans ce cercle. Comme élongation ou comme corde d'élongation, on retrouve alors, suivant que le point est extérieur ou intérieur au cercle, la tangente ou la corde principale déjà considérées à propos des cercles bitangents. L'élongation centrale correspond à un cercle de base de rayon nul.

86. — *L'axe radical de deux cercles variables passe par le centre du cercle fixe.*

Quel que soit le mode d'élongation, les élongations de deux points déterminés peuvent être assimilées à des élongations par radiant, le radiant étant pris à l'intersection des deux axes radicaux correspondants ; ici, ce sera le pôle, par rapport au cercle de base, de la droite qui joint les deux points. La perpendiculaire à cette droite menée par le pôle sera donc l'axe radical des deux cercles [**75**]. Or, cette perpendiculaire contient le centre commun du cercle de base et du cercle fixe.

De là résulte, dans le cas de points variables situés en ligne droite, l'existence de nœuds d'élongation analogues à ceux du § **75**. Les propriétés des § **77** et **78** leur sont applicables, pourvu qu'au radiant, pris comme centre de symétrie, on substitue le pôle de la droite dans le cercle de base.

87. — *Le lieu des points de même élongation par rapport à deux cercles fixes est une perpendiculaire à la ligne des centres.*



La démonstration serait parallèle à celle du § **81**.

Il reste à examiner le cas où les deux cercles seraient concentriques. Appelons r, r' leurs rayons, S, S' ceux des cercles de base, ε, ε' les élongations d'un point quelconque M (*fig.* 44) par rapport aux deux cercles. Soient O leur centre commun et N l'intersection de OM avec la polaire de M dans le cercle de rayon S. On aura $\varepsilon^2 = \overline{MN}^2 = r^2 - \overline{ON}^2$,

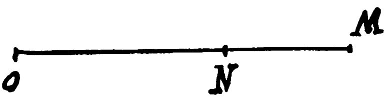


Fig. 44

d'où, en remplaçant MN par la différence entre OM et ON, et observant que le produit OM.ON est égal à S^2, $\varepsilon^2 = \overline{OM}^2 + r^2 - 2S^2$. On a de même $\varepsilon'^2 = \overline{OM}^2 + r'^2 - 2S'S^2$; suivant donc que la condition

$$r^2 - r'^2 = 2(S^2 - S'^2$$

sera ou non remplie; tout point du plan aura la même élongation par rapport aux deux cercles ou aucun ne jouira de cette propriété.

88. — *On déduit trois circonférences ayant pour centre commun le milieu du segment secondaire d'une division syharmonique, et passant, chacune des deux premières par une extrémité du segment primitif, la troisième par les extrémités du segment secondaire. Celle-ci étant prise comme cercle de base, la puissance d'élongation par polaire de tout point du plan relativement à l'une des deux premières circonférences sera égale à la puissance du même point dans l'autre.*

En effet, la notation du paragraphe précédent étant conservée, il viendra ici

$$S^2 = \frac{1}{2}(r^2 + r'^2)\ [\mathbf{72}], \qquad S' = r'\ [\mathbf{85}],$$

et la condition d'égalité entre les deux élongations se trouve satisfaite.

89. — *On décrit trois circonférences concentriques dont la troisième ait pour rayon la moyenne proportionnelle entre la plus courte distance des deux autres et la portion de droite allant du centre commun au milieu de cette plus courte distance. La troisième circonférence étant prise comme cercle de base, l'élongation par polaire d'un point quelconque du plan relativement à la plus grande des deux premières sera égale à l'élongation centrale du même point par rapport à l'autre.*

En effet, on a ici

$$S^2 = \frac{1}{2}(r^2 - r'^2), \qquad S' = 0\ [\mathbf{85}],$$

et la condition du § **87** se trouve satisfaite.

On peut intervertir les rôles des deux circonférences, c'est-à-dire prendre l'élongation centrale relativement à la plus grande; seulement, pour l'autre circonférence, il faudra alors substituer, à l'élongation par polaire, l'élongation par sypolaire, dans laquelle on adopte, pour l'axe radical correspondant à chaque point variable, la sypolaire de ce point dans le cercle de base.

Les deux modes d'élongation, par polaire et par sypolaire, jouissent de propriétés analogues.

De ce paragraphe et du précédent, on peut tirer des conséquences relatives aux coniques, ainsi que nous l'avons fait en partant des § **82** et **83**. Ici, chacun des cercles que l'on aura à considérer sera concentrique avec le cercle bitangent ou avec le cercle allotrope correspondant.

ÉLONGATION PAR INDICE

90. — Pour terminer, nous dirons quelques mots d'un troisième mode d'élongation, celui dans lequel il y aurait un rapport constant, appelé *indice*, entre les distances du centre fixe à l'axe radical et au point variable. Ici, le lieu du pied de l'axe radical sera homothétique de celui du point variable.

Les deux lieux se superposent lorsque l'indice est 1 ; alors, pour tout point intérieur au cercle fixe, l'élongation se confond avec la demi-corde principale du point dans ce cercle ; et, pour tout point extérieur, la demi-corde d'élongation est égale à la tangente menée au cercle. Dans les deux cas, la puissance d'élongation du point et sa puissance dans le cercle fixe sont égales et de signes contraires.

En annulant l'indice, on retrouve l'élongation centrale.

L'indice étant désigné par λ, appelons r le rayon du cercle fixe. La puissance π d'élongation d'un point M situé à une distance z du centre de ce cercle sera donnée par la formule

$$\pi = r^2 - (2\lambda - 1)z^2.$$

Considérons un second cercle fixe de rayon r', et soit λ' l'indice correspondant. Si λ' est égal à λ, le lieu des points d'égale élongation par rapport aux deux cercles sera une droite perpendiculaire à la ligne des centres. Il en sera de même, quels que soient λ et λ', du lieu des points pour chacun desquels le rapport des puissances d'élongation égale celui de $2\lambda - 1$ à $2\lambda' - 1$. Dans tout autre cas où le rapport des puissances d'élongation devra rester constant, le lieu des points variables sera une circonférence.

Nous allons maintenant supposer que les deux cercles sont concentriques. Soit d'abord $\lambda > \frac{1}{2}$. Appelons p la puissance de M dans le second cercle ; on aura $p = z^2 - r'^2$; si donc on prend $r = r'\sqrt{2\lambda - 1}$, il viendra $\pi = -(2\lambda - 1)p$, quel que soit M.

Soit ensuite λ négatif ou positif et plus petit que $\frac{1}{2}$. La formule ci-dessus s'écrira, si on y met les signes en évidence, et si l'on y remplace π par le carré de l'élongation ε,

$$\varepsilon^2 = r^2 + (1 - 2\lambda)z^2.$$

Appelons η l'élongation centrale de M dans le second cercle ; on aura $\eta^2 = z^2 + r'^2$; si donc on prend $r = r'\sqrt{1 - 2\lambda}$, il viendra $\varepsilon = \eta\sqrt{1 - 2}$, quel que soit M.

Pour tirer de là des conséquences relatives aux coniques, il suffit de regarder successivement r' comme le rayon d'un cercle bitangent et comme le rayon d'un cercle allotrope. Ainsi :

A tout cercle ayant son centre sur l'axe focal, correspondent

une droite et un indice tels qu'il y ait un rapport constant entre l'élongation ou la demi-corde d'élongation, d'un point quelconque de la conique par rapport au cercle, et la distance du même point à la droite.

La droite est perpendiculaire à l'axe focal, et les distances du centre de la conique au centre du cercle et à la droite ont entre elles un rapport égal au carré e^2 de l'excentricité.

Si l'on appelle r le rayon du cercle, g la moyenne proportionnelle entre les distances de son centre aux foyers, et si l'on pose

$$\mu = \frac{c}{b} \cdot \frac{r}{g},$$

le rapport constant dont il est question dans l'énoncé sera égal à μe.

Dans le cas de l'ellipse, c'est la demi-corde d'élongation ou l'élongation elle-même, qui doit figurer au numérateur de ce rapport, et l'on doit prendre comme indice $\frac{1}{2}(1 + \mu^2)$, ou $\frac{1}{2}(1 - \mu^2)$, suivant que le centre se trouve ou non, entre les foyers. Le contraire a lieu dans le cas de l'hyperbole.

Avec un énoncé convenablement modifié, la propriété subsiste pour les cercles ayant leurs centres sur le second axe de la conique.

LA GÉOMÉTRIE DU COMPAS

Par M. **Eug. Dubouis,** professeur au collège de Barcelonnette

Je me propose de démontrer très simplement et très élémentairement que le compas suffit aux constructions que l'on effectue ordinairement avec la règle, l'équerre et le compas, et que l'on peut même s'interdire l'usage d'arcs tangents pour déterminer des points. Pour cela, remarquons que l'équerre est inutile, comme on sait. Alors comme la règle et le compas ne servent qu'à déterminer des points par des intersections de circonférences et de droites, il suffit de donner des procédés pour trouver ces points d'intersection.

Les données ne seront que des points, soit considérés pour eux-mêmes, soit pour déterminer des lignes.

Cela posé nous divisons la démonstration en deux parties. Dans la première le compas est supposé illimité. Dans la seconde il est limité et les problèmes sont ainsi rendus pratiques.

PREMIÈRE PARTIE

Préliminaires. — 1° Prendre le symétrique d'un point par rapport à une droite (Facile).

2° Trouver le quatrième sommet D du parallélogramme ABCD, autrement dit : mener par le point C pris pour origine un segment équipollent à AB (Facile).

3° Doubler un segment et par suite le multiplier par un nombre entier.

Soit AB le segment. Soit C un point quelconque. Menons CD équipollent à AB, puis BE équipollent à CD. AE est double de AB.

Une autre solution est tirée de l'inscription de l'hexagone régulier.

3° Trouver la quatrième proportionnelle à trois longueurs a, b, c.

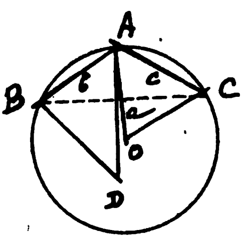


Fig. 1

1er *Cas.* — $2a > b$; $a > c$. Avec a pour rayon décrivons une circonférence (O). Menons les cordes AB et AC égales à b et c (fig. 1). Soit D le symétrique de A par rapport à BC. La longueur cherchée est AD.

En effet, les angles ABD et ADC sont égaux comme doubles de ABC. Comme d'autre part les triangles ABD et ADC sont isoscèles, ils sont semblables.

Donc $\frac{AO}{b} = \frac{c}{AD}$ ce qui démontre la proposition.

2e *Cas.* — $2a$ n'est pas à la fois inférieur à b et à c. On prend pour AO dans la figure précédente un multiple de a tel que la construction devienne possible. Alors si $OA = na$, on a :

$$\frac{na}{b} = \frac{c}{AD} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{nAD}.$$

La 4e proportionnelle qui est AD est facile à construire (3°).

4° Reconnaître si trois points sont sensiblement en ligne droite.

On reconnaît qu'il en est ainsi à ce que, en cherchant le symétrique d'un des points par rapport à la droite déterminée par les

deux autres, on est amené à décrire des arcs sensiblement tangents.

5° Reconnaître si une droite CD est sensiblement perpendiculaire à une droite AB.

On cherche si le symétrique de C par rapport à AB est sensiblement sur CD.

PROBLÈMES FONDAMENTAUX

1° INTERSECTION DE DEUX DROITES AB ET CD

1er *Cas.* — AB et CD sont les côtés égaux d'un trapèze isoscèle.

Supposons AC $>$ BD. Soit M le point cherché. Menons AE équipollent à BD (2°). On a $\frac{EC}{BD} = \frac{ED}{BM}$ qui permet de construire BM (3°). On trace de B et D comme centres des cercles de rayon BM et on prend celui de leurs points communs qui est sur AB (4°).

2e *Cas.* — AB et CD sont les diagonales d'un trapèze isoscèle (Construction analogue).

3e *Cas.* — Droites quelconques, non sensiblement perpendiculaires (Voir 5°).

On remplace une des droites par la symétrique de l'autre par rapport à elle, et on est ramené à l'un des deux premiers cas.

4e *Cas.* — Droites perpendiculaires ou presque perpendiculaires (*fig.* 2).

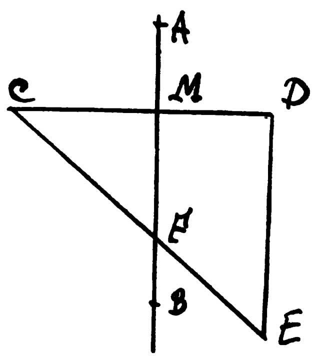


Fig. 2

On mène DE équipollent à AB (2°). On peut même multiplier DE de manière que CE devienne aussi oblique à AB que l'on veut. On cherche le point F commun à AB et CE. Si M est le point cherché, on a

$$\frac{CE}{CF} = \frac{DE}{FM} = \frac{CD}{CM},$$

ce qui permet de construire FM et CM. On aura ensuite le point M par deux arcs exactement ou sensiblement orthogonaux, ce qui constitue une très bonne méthode. Pour choisir convenablement celui des deux points que l'on trouve, on utilise le n° 4.

2° INTERSECTION DE DEUX CERCLES

Nous sommes maintenant en état de construire un cercle passant par trois points et le problème indiqué est alors immédiatement résolu.

3° INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE

1er *Cas.* — La droite ne passe pas par le centre.

On cherche le centre du cercle, et, cela fait, il est facile de tracer le cercle symétrique du cercle donné par rapport à la droite. Il coupe le premier aux points cherchés.

CORRECTION ET CLASSEMENT DES COPIES

Le Directeur-gérant,
GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^{T}-CYR

120. Mathématiques. — Résoudre un triangle ABC, connaissant un côté a, la différence β des angles adjacents à ce côté et sachant que le sommet A est situé sur une droite xy donnée de position.

Léopold Massip,
Professeur de Mathématiques spéciales à l'Ecole Saint-Georges.

121. — On donne deux circonférences tangentes extérieurement de rayon R et r. On mène la tangente commune AB (A sur la circonférence de rayon R et B sur celle de rayon r). Soit C le point de contact des deux circonférences, on forme le triangle ACB. Démontrer que ce triangle est rectangle et exprimer ses côtés en fonction de R et de r.

Léopold Massip.

122. Epure. Cône et prisme. — 1° Le cône est de révolution. Son sommet est projeté horizontalement en S et est situé à 200 millimètres au-dessus du plan horizontal. L'axe du cône est projeté horizontalement suivant la droite SO ; le point O en est la trace horizontale. Le demi angle au sommet du cône est de 15 degrés. On demande : 1° de déterminer, d'après ces données, l'ellipse de base du cône sur le plan horizontal. Le prisme est oblique, sa base sur le plan horizontal est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle dont le centre est le point C et dont le diamètre est de 115 millimètres. Un des sommets a du triangle est à l'extrémité du diamètre perpendiculaire à l'axe du cône. Les arêtes sont inclinées à 45° sur le plan horizontal et en projection horizontale

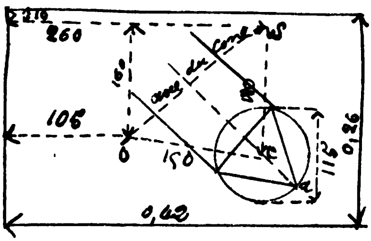


Fig. 1

Lire à la quatrième page de la couverture les conditions relatives à la correction et à l'abonnement des copies.

elles sont perpendiculaires sur la projection horizontale de l'axe du cône. On demande de déterminer l'intersection du cône et du prisme et de représenter en projection horizontale seulement le cône entaillé par le prisme.

123. Calcul trigonométrique. — Calculer les angles et le surface d'un triangle ABC, connaissant les trois côtés :

$$a = 3245 \qquad b = 5879 \qquad c = 5783.$$

(Concours de 1897).

124. Questions posées à l'oral. — Rendre calculable par logarithmes les expressions :

$$1 + \operatorname{tg} a, \; 1 + \operatorname{tg}^2 a, \; 1 + \operatorname{tg}^3 a, \; 1 + \operatorname{tg}^4 a.$$

125. — Discuter la fonction : $Y = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

Résoudre l'inégalité : $\dfrac{a}{x-a} - \dfrac{2a}{x+a} > \dfrac{8a^2}{x^2a^2}$.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

126. Mathématiques. — On inscrit un cylindre dans une sphère donnée, étudier la variation du volume du solide formé par ce cylindre surmonté à l'une de ses bases par l'hémisphère de même rayon que cette base.

127. — Calculer x donné par la formule :

$$x = \frac{(a+b)^m (m)(m-1)(m-2)(m-n+1)}{\sqrt[q]{1.2.3\ldots n}}$$

en se servant des logarithmes sachant que

$$a = 5 \qquad b = 35 \qquad m = 15 \qquad n = 8 \qquad q = 7.$$

128. Physique et chimie. — Un tube barométrique dont le sommet s'élève à 76 centimètres au-dessus du niveau de la cuvette supposée très large contient de l'air sec qui occupe au-dessus du mercure dans le tube une longueur de 10 centimètres. On introduit dans le tube un liquide qui se volatilise entièrement et sature l'espace x occupé finalement par le mélange d'air et de vapeur. Déterminer x. La pression extérieure est équilibrée par 76 centimètres de mercure et la force élastique maximum de la vapeur à la température de l'expérience par 10 centimètres de mercure.

Donner les préparations du soufre, indiquer ses préparations physiques et les usages de ce corps.

129. Questions posées à l'oral. — Trouver $\sin \frac{a}{2}$, connaissant *tga*.

130. — On donne un triangle rectangle, on partage l'hypothénuse en $2n$ parties égales. Trouver la résultante du système de forces partant du *sommet* de l'angle droit et aboutissant aux points de division de l'hypothénuse.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES MATHÉMATIQUES

131. (*Obligatoire*). — On donne un cercle O et deux diamètres perpendiculaires OX et OY. On demande de mener une tangente AB (A sur OX, B sur OY), de façon que l'on ait $OA + OB = 2m$. Minimum de m.

132. (*Au choix*). — Recherche des divisions d'un nombre.

Un nombre divisible séparément par plusieurs nombres entiers, premiers entre eux, est divisible par leur produit.

Exposer les principes sur lesquels reposent la recherche du plus petit commun multiple de plusieurs nombres donnés.

133. Physique. (*Obligatoire*). — Dans une pompe aspirante la course du piston est de $0^m,50$ et la longueur du corps de pompe est égale à 3 décimètres carrés.

Quelle doit-être la hauteur du tuyau d'aspiration pour que la pompe soit amorcée dès le premier coup de piston. Section du tuyau d'aspiration 15 centimètres carrés. Quel est l'effort que l'on doit faire pour soulever le piston lorsque la pompe est en mouvement.

134. (*Au choix*). — Mélange des gaz et des vapeurs.

134 bis. — Mélange des gaz.

Déterminer la force élastique de l'air contenu dans un récipient après n coup de piston quand ce récipient est en communication avec la machine pneumatique.

135. Questions posées à l'oral. — Diviser

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} \ldots + A_{m-1}x + A_m \text{ par } x + a$$

et déterminer la loi du quotient.

Montrer que le système d'équation $A = e$ $B = 0$ est équivalent au système $mA + nB = 0$ et $A = e$.

IV. — BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT MODERNE

136. — Une droite AB de longueur donnée a dont les extrémités s'appuient à la fois sur les deux côtés d'un angle donné $\mathrm{POS} = \alpha$ peut occuper une infinité de positions. On demande quelle est celle pour laquelle la surface latérale du tronc de cône qu'elle engendre en tournant autour de l'axe perpendiculaire à OP atteint une valeur donnée πma. Examiner spécialement le cas où l'angle α est de 60 degrés et déterminer le maximum de cette surface.

137. (*Au choix*). — 1° Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle opposé.

1° Résoudre un triangle connaissant les trois côtés.

3° Problême de la carte. (Sujets donnés à Alger).

138. Physique. — Un baromètre est enfermé dans un large tube de verre scellé à la lampe. A l'instant de la fermeture la hauteur de la colonne est 76 centimètres et la température 15 degrés. Galculer la hauteur de la colonne lorsque la température est de 40 degrés.

Coefficient de dilatation du mercure. . . . . $\frac{1}{5550}$

Coefficient de dilatation de l'air 0,00366. On ne tiendra pas compte de la dilatation du verre.

139. (*Au choix*). — 1° Décrire et interpréter les expériences qui conduisent aux notions de potentiel et de capacité électrique.

2° Condensation élictrique.

3° Enoncer les lois fondamentales des courants. Unités pratiques d'intensité, de résistance et de force électromotrice.

140. Questions posées à l'oral. — Déterminer a et b de manière que le maximum et le minimum de l'expression

$$\frac{x^2 - ax - 3}{x^2 - bx + 5}$$

au lieu pour $x = 2$ et pour $x - 3$.

141. — Condition nécessaire et suffisante pour que trois nombres A, B, C soient les termes de rang m, n et p, d'une même progression arithmétique.

V. BACCALAURÉAT (LETTRES. — SCIENCES)

142. — Appliquer les propriétés des dérivées à la résolution de la question suivante : de toutes les boîtes cylindriques fermées de même surface totale πa^2. Quelle est celle qui présente la plus grande capacité? Quelles sont les dimensions de celle dont la capacité serait d'un hectolitre et qui remplirait les conditions de maximum indiquées.

143. (*Au choix*). — Etant donnés deux points sur la ligne de terre, un point dans le plan vertical et un point dans le plan horizontal, faire passer une sphère par ces quatre points. Déterminer son centre et son rayon.

II. Placer une sphère de rayon donné R de manière qu'elle soit tangente à la fois au plan horizontal, au plan vertical et au plan donné par ces traces LKP.

III. Etant donnée une droite ab $a'b'$ et une sphère oo', mener par la droite un plan qui coupe la sphère suivant un cercle de rayon donné r.

144. Physique et chimie. (*Au choix*). — I. Transformation du travail en chaleur. — Principe de l'équivalence. — Détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur. — Expérience de Joule.

II. Principe de la machine à vapeur : condenseur, son utilité. Mouvement du tiroir : détente. Puissance d'une machine. Unité pratique. Unités C. C_1. S.

III. Densité des gaz ; sa détermination par la méthode de Regnault, dans le cas où le gaz n'attaque pas les métaux. Comment varie ls densité d'un gaz avec la température et la pression ?

145. (*Obligatoire*). — On donne n éléments de pile identiques dont la résistance intérieure est r. Quelle doit être la résistance extérieure R pour qu'il n'y ait aucun avantage à les associer en série ou en batterie

On donne $r = 2$ ohms, $R = 10$ ohms. Quelle est la disposition la plus avantageuse.

146. Questions posées à l'oral. — Vraie valeur de

$$\frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$$

lorsque x tend vers 1.

147. — Résoudre l'équation :

$$\frac{a+x}{b+x}+\frac{b+x}{a+x}=\frac{5}{2}$$

VI. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

148. Arithmétique. — Un spéculateur achète un pré à raison de 5,000 francs l'hectare. Après l'acquisition il s'aperçoit que son pré contient 8 décamètres carrés de moins que ce qu'il a payé ; néanmoins il ne fait aucune réclamation, car il trouve l'occasion de le céder de suite au prix de 60 francs l'are (contenance exacte). En faisant cette vente il gagne 12 0/0 sur cequ'il a déboursé. Calculer la contenance réelle du pré et calculer ses dimensions sachant qu'il est rectangulaire et que sa diagonale vaut 170 mètres.

149. Géométrie. — Une pyramide a pour base un triangle ABC, dont les côtés AB, AC, BC, valent respectivement 26 décimètres, 3 mètres et $2^{m},80$. Son sommet S est sur la perpendiculaire menée par H (H centre du cercle circonscrit au triangle ABC) au plan ABC et $AS = 1^{m},80$. Calculer le volume de cette pyramide en décimètres cubes et calculer sa surface totale en mètres carrés.

150. Physique et chimie. — I. Poids spécifique des gaz.

II. Hydrogène sulfuré. Sulfures.

VII. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

151. Composition facultative de comptabilité. — (*2 heures*). I. Comparer le rôle du commissionnaire en marchandises et du courtier en marchandises. — Duçroire.

II. Etablir le *bordereau d'escompte* suivant :

Le 10 octobre 1897, remis en compte courant à la « Banque Centrale » :

1° $938^{f},45$ Bordeaux. . . . à vue ; taux du change : *p*. (pair) ;
2° $311^{f},20$ St-Hippolyte (min. 500) 20 oct. — 70 c/
3° $1285^{f},40$. . . . . 31 déc. — 25 c/

Taux d'escompte : 4 1/4 p. 0/0 (calculer par les nombres) ; minimum d'escompte pour effets à vue ou trop courts :

10 jours pour les effets payables dans les chefs-lieux de département.

15 jours pour les effets payables dans les chefs-lieux d'arrondissement.

20 jours pour les effets payables dans les autres localités.

Commission 3 p. $^0/_0$.

III. *Opérations à passer au Journal* (parties doubles) en autant d'articles que ci-dessous :

1° Acheté des marchandises des suivants :

1° Arbel.	5,800f
2° Leroy.	3,650
3° Au détail, payé comptant	250
	9,700

2° Mon règlement avec Arbel :

1° Espèces.	1,000f
2° Mon billet à son ordre	1,200
3° Ma remise en 2 effets.	1,830
4° Escompte. . . . . ,	116
5° Chèque sur mon banquier E. Jarry et Cie	1,654
	5,800

3° Ecritures de la même opération chez Arbel.

4° Négocier au comptant chez E. Jarry et Cie :

Effet n° 1275, nominal.	1260f,00
Agio.	19,90
ENCAISSÉ le net. .	1240,10

152. Arithmétique. — La betterave blanche de Silésie donne 7 $^0/_0$ de son poids en sucre. 1° Quelle superficie faudra-t-il ensemencer dans un terrain qui produit approximativement 3kg125 de cette espèce de betterave par mètre carré, pour fournir la quantité de betteraves nécessaire à la fabrication de 87,500 kilogrammes de sucre. 2° Quelle serait la valeur des betteraves à raison de 16frs,50 les 1,000 kilogrammes.

153. Algèbre. — Trouver deux nombres dont la somme soit 12 et le produit 35.

Résoudre

$$x(y+z)=a$$
$$y(x+z)=b$$
$$z(x+y)=c.$$

154. — Calculer x donné par la formule :

$$\sqrt[15]{\frac{\sqrt{\overline{88{,}10}^{2}}}{\sqrt[3]{\overline{58{,}9}^{3}}} \times \overline{7999}^{2} \sqrt[6]{37{,}89}}$$

DEUXIÈME PARTIE

Ont résolu les questions du numéro de novembre :

I. *A l'École de Saint-Cyr.* — MM. de Géransac à Rouen, Martinard à Périgueux, Laplanche à Perpignan, Marcenac à Cahors, Balitrand à Tours, Bessières Raymond à Tulle, Louis Cazal à Decazeville, Henri Laffite à Moissac, Jean Loüys à Aurillac, Paul Boyer à Pithiviers (tout l'examen), Dubuy à Rodez, Paul Lion à Tarbes, René Riche à Nice, Léon Polin à Meudon, Tarnyés à Figeac (la question de Mathématiques), Bardin à Lille, Colas, Vicq à Flaujac (l'épure), Vincent à Beauvais, Maréchal à Paris, Lefèvre à Paris, Baudel à Paris (le calcul trigonométrique).

II. *A l'Institut Agronomique.* — MM. Vaucant à Montpellier, Teysserac à Cambrai, Albeski à Brest, Mironyl à Bastia, Maurice Destins, Léon Rouquette à Cahors, Rivière à Moissac, Sauzely à Perpignan (tout l'examen).

III. *Au Baccalauréat Lettres Mathématiques.* — MM. Maurice Destins, Lugan à Liège, Mock Léon à Blois, Chanut Alphonse à Toulouse, Ramel à Vienne (tout l'examen).

IV. *Au Baccalauréat de l'Enseignement Moderne.* — MM. Vicq à Flaujac, Brunel à Périgueux, Trespoux à Gap, Maurice Destins (tout l'examen).

V. *Aux Écoles d'Agriculture.* — MM. Paulin Duval à Agen, Tassart à Nancy, Martin à Hozelerauck, Hagener à Lille (tout l'examen).

Nota. — Les abonnés à la correction des copies trouveront dans la troisième partie de nombreuses questions résolues qui pourront les fortifier dans la préparation de leurs examens.

BIBLIOGRAPHIE

Cours de Géométrie Descriptive de M. Roubaudi, *professeur au lycée* Buffon *et au lycée* Carnot. — *Masson et Cie, éditeurs, 120, boulevard Saint-Germain.*

Dans sa préface, M. Roubaudi s'exprime ainsi : « Les procédés de la Géométrie Descriptive étant fondés sur la transformation des figures par projection, il était naturel de donner dès le début les principes de cette méthode qui sont utilisés dans la suite. J'en ai déduit la notion des éléments à l'infini, indispensable en Géométrie descriptive ». Cette phrase indiquant une innovation dans les méthodes d'exposition, employées jusqu'à ce jour, pour l'enseignement de la Géométrie Descriptive, nous avons lu l'ouvrage de M. Roubaudi avec la plus grande attention. L'exposition claire des méthodes

et l'ordre qui règne dans ce livre en font un outil précieux, entre les mains de ceux qui veulent apprendre la géométrie de Monge.

Les figures sont faites de façon à servir de modèle de trait aux élèves qui désireraient faire des épures soignées. C'est donc avec plaisir et conviction que nous recommandons cet ouvrage à tous ceux qui préparent des examens où figure un programme de Géométrie Descriptive. G. M.

SOLUTION DES QUESTIONS 1 ET 2 (COPIE D'ÉLÈVE)

On considère tous les triangles qui ont un sommet A *commun, la bissectrice* AD *de l'angle* A *invariable de grandeur et de position et dont le cercle circonscrit passe par un* 3e *point fixe* E *de la droite* AD : 1° *Démontrer que dans tous les triangles le produit du diamètre du cercle circonscrit par la hauteur est constant*; 2° *Trouver le lieu du milieu du côté opposé au point* A; 3° *Trouver le lieu du point de rencontre des médianes*; 4° *Construire le triangle connaissant les points* A, D, F *et soit la grandeur de* A, *soit la longueur du côté opposé* BC.

1° Nous voulons démontrer que l'on a : $2Rh_a = bc$. Or, d'après un théorème connu on a : $\overline{AD}^2 = 2Rh_a - BD \times BC$, mais $BD.DC = AD \times DF$. Or, A, D, F sont fixes; donc $AD \times DF$ est constant

$$2Rh_a = \overline{AD}^2 + AD \times DF = K^2 = \text{constante}.$$

2° Si on abaisse la perpendiculaire du point F (milieu de l'arc BC) sur la corde BC elle passe par le milieu M de ce côté. Le point M se trouve donc sur la circonférence décrite sur DF comme diamètre. La réciproque est facile à étudier.

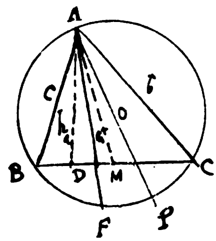


Fig. 2

3° Le lieu du point de rencontre des médianes est une circonférence homothétique à la circonférence décrite par le point M (évident).

4° Construisons le triangle connaissant l'angle A, les points A, D, F. Supposons le problème résolu. Soit BC mis en place on a :

$$BD \times DC = AD \times DF = K^2,$$

un premier lieu de B est le côté AX de l'angle et un premier lieu de C est AY, un 2° lieu de C est la figure inverse de AB le centre d'inversion étant D et le module $-K^2$ *construction* : on a $BE \times DC = DA \times DF$. Je mène DE perpendiculaire à AX. Je trace la circonférence passant par A, E, F, elle coupe DE en E′ et l'on a : $DB \times DC = DA \times DF = BE \times DE'$, la circonférence inverse est donc la circonférence décrite sur DE′ comme diamètre, elle coupe AY en deux points C′ et C″ qui répondent à la question. **Raymond de Saint-Roman.**

2° Dans un triangle ABC on donne $B = 30$, le rapport $\frac{b}{c} = m$ et la distance x entre les pieds des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A, calculer C et construire le triangle. Posons

$$MC = \beta, \quad MN = x, \quad MB = y, \quad CN = \beta', \quad BN = y'.$$

On a

$$\overline{AM}^2 = bc - \beta y, \qquad \overline{AN}^2 = \beta' y' - bc,$$

$$\beta = \frac{ab}{b+c}, \quad y = \frac{ac}{b+c}, \quad \beta' = \frac{ab}{b-c}, \quad y' = \frac{ac}{b-c}.$$

En outre, les deux bissectrices AM et AN sont rectangulaires, on a :

$$\overline{MN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2,$$

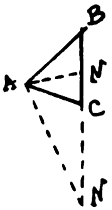


Fig. 3

d'où

$$x^2 = a^2bc \left\{ \frac{1}{(b-c)^2} - \frac{1}{(b+c)^2} \right\} = \frac{4a^2b^2c^2}{(b^2-c^2)^2},$$

$$x = \frac{2abc}{b^2-c^2} \text{ (on suppose } b^2 > c^2).$$

Mais on a $\frac{b}{c} = m$, on a donc $x = \frac{2am}{m^2-1}$, d'où $a = \frac{(m^2-1)x}{2m}$. On a : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 30$, $b^2 = a^2 + c^2 - ac$, or, $b^2 = m^2c^2$, donc $m^2c^2 = \frac{(m^2-1)^2x^2}{2m} + c^2 - \frac{(m^2-1)cx}{2m}$. Cette équation est divisible par $m^2 - 1$, il revient : $4m^2c^2 - 2mxc - (m^2-1)x^2 = 0$.

Réalité. $\quad m^2x^2 + 4(m^2-1)x^2 \geqslant 0 \qquad 5m^2 - 4 \geqslant 0$

$\quad m^2 + 4m^2 + 4 \geqslant 0 \qquad m^2 \geqslant \frac{4}{5} \qquad m > \frac{2}{\sqrt{5}}.$

. . . .

Raymond de Saint-Roman.

TROISIÈME PARTIE

LA GÉOMÉTRIE DU COMPAS

Par M. **Dubouis** (*suite et fin*, voir le numéro de décembre).

2e *Cas.* — La droite est déterminée par le centre O du cercle (O), et un point A (*fig.* 3). Menons la tangente AB au cercle. Pour cela, nous aurons à prendre le milieu de AO et nous serons amenés à construire un point C équidistant de A et de O.

Traçons le cercle de centre C passant par A, et soit D le point diamétralement opposé à A obtenu par l'inscription de l'hexagone régulier. Déterminons sur ce cercle la corde AE égale à AB. Le cercle décrit du point D comme centre et passant par E coupe le cercle donné aux points cherchés P et Q.

En effet, la puissance du point A par rapport au cercle de centre D est $\overline{AE}^2$, car AE étant perpendiculaire au rayon DE est tangent à ce cercle. Or, $\overline{AE}^2$ est égal à $\overline{AB}^2$. Donc le point A a même puissance par rapport aux deux cercles et, par suite, il est sur leur axe radical, ce qui démontre la proposition.

DEUXIÈME PARTIE

Probleme I. — Soient A, B, C trois points tels que la distance AC puisse être prise au compas, AB ne le pouvant pas. Mener BD équipollent à CA.

On intercale entre AC et le point B une suite de parallélogrammes successifs de côtés suffisamment petits.

Problème II. — Trouver le milieu de AB.

On remplace AB par un segment CD plus petit et déterminé comme dans le problème précédent. CD a même milieu que AB. On continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait un segment suffisamment petit.

Problème III. — Rendre possibles les constructions de la 1re partie.

On prend un centre d'homothétie S. On réduit la figure formée par les données dans le rapport $\frac{1}{2^n}$, n étant assez grand pour que le problème puisse se traiter sur la nouvelle figure avec le compas donné. On y arrive par le problème II. La construction étant faite sur la seconde figure, on l'amplifie par homothétie dans le rapport $\frac{2^n}{1}$, au moyen du centre S et le problème est achevé.

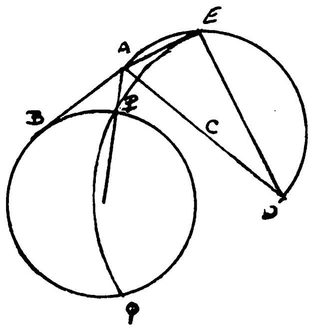


Fig. 4

Remarque. — Quand le compas est suffisamment grand, on voit, en reprenant les raisonnements de la première partie, que l'on peut toujours arriver droit au but sans hésitation.

Mais si le compas n'est pas assez grand on rencontre une difficulté. Pour résoudre les problèmes auxiliaires, il faut faire des tâtonnements. Cet inconvénient n'est pas grand quand on peut embrasser d'un coup d'œil toute la figure, car alors les simples notions de direction et de distance permettent de diriger convenablement les opérations. Dubouis.

QUESTION 672

Solution, par M. V. Cristescu, Ingénieur à Bucarest

On donne les relations :

$(\text{tg}\, x + \text{tg}\, y)\, \text{tg}\,(x+y) = (\text{tg}\, y + \text{tg}\, z)\, \text{tg}\,(y+z) = (\text{tg}\, z + \text{tg}\, x)\, \text{tg}\,(z+x)$, on demande d'isoler les inconnues, c'est-à-dire tirer des relations en question les suivantes : $f(x) = f(y) = f(z)$. (G. L.).

Les relations proposées peuvent être écrites :

$$\frac{(\text{tg}\, x + \text{tg}\, y)^2}{1 - \text{tg}\, x\, \text{tg}\, y} = \frac{(\text{tg}\, y + \text{tg}\, z)^2}{1 - \text{tg}\, y\, \text{tg}\, z} = \frac{(\text{tg}\, z + \text{tg}\, x)^2}{1 - \text{tg}\, z\, \text{tg}\, x}.$$

Si l'on retranche, d'après une propriété connue, le deuxième rapport du premier, le troisième du deuxième et le premier du troisième, terme à terme, on obtient, si l'on supprime les facteurs communs aux numérateurs et aux dénominoteurs :

$$\frac{\text{tg}\, x + 2\, \text{tg}\, y + \text{tg}\, z}{\text{tg}\, y} = \frac{\text{tg}\, y + 2\, \text{tg}\, z + \text{tg}\, x}{\text{tg}\, z} = \frac{\text{tg}\, z + 2\, \text{tg}\, x + \text{tg}\, y}{\text{tg}\, x}.$$

Si l'on fait la somme des numérateurs et des dénominateurs, on trouve

que ces rapports sont égaux à 4. On en conclut que l'on a les équations :

$$\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = 2 \operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} y,$$
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \operatorname{tg} z.$$

Ces trois équations forment un système indéterminé, car si l'on ajoute deux d'entre ces équations, on obtient la troisième. Elles donnent

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z, \quad \text{ou} \quad x = k\pi + y = k'\pi + z,$$

ce qui résout la question. **V. Cristecu.**

QUESTION 600

Solution par M. H. Dellac

I. — *Pour qu'une droite* L *soit l'axe de similitude (ou droite double, d'un système de deux polyèdres semblables* P,P', *il faut et il suffit que toutes les arêtes homologues soient vues, à partir de* L, *sous des angles dièdres égaux chacun à chacun et rangés dans le même ordre.*

Si on ne considère pas tous les points de l'espace comme rattachés à P *et* P', *il peut y avoir exception.*

LA CONDITION EST NÉCESSAIRE

On suppose la droite L axe de similitude ; donc, par une notation autour de L on peut amener P' à être homothétique de P par rapport à un certain point de L. Alors les arêtes homologues sont vues, à partir de L, sous des angles dièdres identiques, si l'homothétie est directe, ou opposés par l'arête si elle est inverse. Donc avant la notation ces arêtes étaient vues sous des angles égaux et rangés dans le même ordre.

Remarque. — Dans le cas de la similitude inverse il y a suivant L deux rayons homologues, l'un de P et l'autre de P', dirigés en sens contraires. Pour juger de l'ordre des éléments dans chaque figure, il faudrait deux observateurs placés de la même manière par rapport à ces figures, c'est-à-dire en sens contraires le long de L. Par suite, ils verraient les dièdres égaux des deux figures rangés dans un ordre inverse. Mais l'énoncé n'admet qu'un observateur.

LA CONDITION EST SUFFISANTE

On s'appuiera sur le lemme suivant, facile à démontrer :

Par une droite donnée L *et tous les sommets* A, B, C *d'un polyèdre* P *on fait passer des plans ; par un point* a *pris dans le plan* (L, A) *on mène* ab *parallèle à* AB *et limitée au plan* (L, B ;) *on mène de même* ac *parallèle à* AC *et limité au plan* (L, C) *etc. ; démontrer que les points* a, b, c, *forment un nouveau polyèdre* p *homothétique à* P *par rapport à un point de* L.

L'homothétie peut être directe ou inverse.

Cela admis, je fais tourner le polyèdre P' autour de L de manière que le feuillet (SA') vienne se placer sur le feuillet (S,A) ; d'après l'hypothèse le feuillet (L,B') se placera sur (L,B), le feuillet (L,C') sur (L,C), etc. Soit p cette nouvelle position de P'. Par un sommet A du polyèdre P, non situé sur L,

je mène des droites parallèles aux arêtes A'B', A'C' de la figure p, et je les arrête aux plans (L,B), (L,C)... D'après le lemme je forme ainsi une nouvelle figure P″ homothétique à D par rapport à un point de L, et le rapport d'homotétie est égal au rapport donné 5. Donc ce polyèdre P″ est semblable à P' et par suite à P, et le rapport de similitude est $\frac{\rho}{\rho} = +1$. Ces deux polyèdres P″, P sont donc directement égaux. Je dis de plus qu'ils coïncident. Dans le polyèdre P je considère avec AB d'autres droites égales partant aussi de A et limitées au plan (L,B). Cela est possible puisqu'on suppose tous les points de l'espace rattachés à la figure P. Ces droites forment un cône droit ayant pour sommet A et pour hauteur la droite AI perpendiculaire au plan (L,B). Ces droites ont pour homologues dans P' puis dans p, puis dans P″ des droites aussi toutes égales entre elles. Comme par hypothèse ces droites nouvelles sont vues, à partir de L, sous des angles dièdres égaux à ceux de leurs homologues dans P, elles sont vues toutes sous un angle égal à $\widehat{ALB}$ en grandeur et en sens; donc elles sont aussi limitées au plan (L,B); elles forment donc aussi un cône droit ayant pour hauteur AI. Les deux cônes de P et de P″ étant égaux, coïncident, mais cela ne suffit pas pour démontrer la coïncidence de P et P″. Cela prouve que la droite AI perpendiculaire au plan (L,B) représente deux droites homologues coïncidentes des figures P, P″. On verra de même que la perpendiculaire AH, abaissée du point A sur un autre plan (L,C) passant par L, représente aussi deux droites homologues coïncidentes des figures P,P″. Donc le triangle AIH représente deux faces homologues coïncidentes des deux figures P, P″. Puisque déjà ces figures sont directement égales, elles coïncident.

Donc enfin le polyèdre p est homothétique de P par rapport à un point de L; par suite P' tournant autour de L est devenu homothétique à P par rapport à un point de L; cela prouve que L est l'axe de similitude des deux figures P, P'. C. Q. F. D.

Exception. — Cette démonstration suppose que à partir de A on peut mener plus d'une perpendiculaire sur les plans passant par L.

Si on ne considérait pas tous les points de l'espace comme rattachés à P, il pourrait se faire qu'il n'y eût qu'une perpendiculaire partant de A, et alors le théorème serait en défaut. C'est ce qui arrive si la figure P se réduit à une pyramide dont la base passe par L. En effet, prenons deux pyramides semblables dont les bases sont situées d'une manière quelconque dans le même plan. Tout plan passant par les deux sommets coupe le plan de la base suivant une droite L, d'où l'on voit les arêtes des pyramides sous des angles égaux, et cependant ce n'est pas un axe de similitude.

Il y aurait encore exception dans le cas de deux polygones semblables plans. L'intersection des deux plans jouit de la propriété énoncée sans être axe de similitude. C'est que dans ce cas la figure P″ n'existe pas.

II. — Pour qu'un point soit le centre de similitude (ou point double) du système de deux polyèdres semblables P, P' il faut et il suffit que, de ce point on voit les arêtes homologues sous des angles égaux chacun à chacun.

LA CONDITION EST NÉCESSAIRE

Si le point σ est centre de similitude, en faisant tourner P' d'un angle convenable autour d'un axe passant par σ, on peut rendre ce polyèdre homothétique de P soit directement soit inversement. Dans les deux cas on voit alors les arêtes homologues sous des angles égaux : donc il en était de même avant la notation.

Cette première partie prouve qu'il existe toujours un point remplissant les conditions de l'énoncé.

LA CONDITION EST SUFFISANTE

Les droites partant de σ et allant aux sommets de P, P' forment deux angles polyèdres que l'on peut décomposer en trièdres, qui auront leurs faces égales chacune à chacune d'après l'hypothèse. Dans les couples de trièdres les éléments sont toujours rangés dans le même ordre ou toujours dans l'ordre inverse. On ne pourrait pas avoir le même ordre dans un couple et l'ordre inverse dans un autre. Supposons par exemple deux couples ayant une face commune (σABC, σA'B'C') et (σABD, σA'B'D'), les deux premiers ayant le même ordre et les deux autres l'ordre inverse. Je fais coïncider σA'B'C' avec σABC ; alors les arrêtés σD', σD deviennent symétriques par rapport à la face commune : donc les arêtes CD, C'D' ne peuvent pas être vues du point σ sous des angles égaux, ce qui est contre l'hypothèse.

Les angles trièdres et par suite les angles polyèdres de P et de P' sont directement ou inversement égaux. On peut donc amener l'angle polyèdre de P' à coïncider avec celui de P dans le premier cas, ou avec l'angle opposé par le sommet dans le second en lui faisant exécuter une rotation convenable autour d'un axe passant par le sommet commun σ. Je désigne par p cette nouvelle position P' : elle est semblable à P et le rapport de similitude est ρ. Par le sommet A, homologue du sommet A', je mène des droites AB'', AC'' respectivement parallèles aux arêtes A'B', A'C' de p, et je les limite aux rayons σB, σC. Je détermine ainsi des sommets d'un nouveau polyèdre P'' qui est évidemment semblable à p, et le rapport de similitude est ρ. Donc les deux polyèdres P, P'' sont semblables entre eux et leur rapport d'homothétie est $\frac{\rho}{\rho} = +1$; donc ces deux figures sont directement égales ; je vais démontrer de plus qu'elles coïncident.

En même temps que la droite AB je considère dans P la droite AB, égale à AB et limitée aussi au rayon σB. Cela est possible puisque tous les points de l'espace sont rattachés à P. Dans la figure P'' les droites homologues AB'', AB'' sont égales entre elles, et les triangles homologues ABB_1, $AB''B''_1$ sont égaux. De plus, la droite AB'' doit être vue du point σ sous un angle égal à AσB, en grandeur et en sens ; donc l'extrémité B''_1 se trouve sur σB. Les deux triangles isoscèles égaux ABB_1, $AB''B_1$ ayant même sommet et leurs bases sur une même droite doivent coïncider ; mais on ne sait pas si AB'' tombe sur AB ou AB_1. Ce qu'il y a de certain c'est que les hauteurs des deux triangles sont des droites homologues coïncidentes suivant AI. On verrait de même qu'une autre droite AH perpendiculaire sur un autre rayon σC représente deux droites homologues de P et P''. Ces deux figures direc-

tement égales ont donc deux triangles homologues coïncidents ; donc elles coïncident.

On voit donc que p est homothétique à P par rapport au point σ ; par suite P′ peut être rendue homothétique à P par rapport au point σ par une rotation autour d'un axe passant par ce point. Donc ce point σ est bien le point double, ou centre de similitude des deux polyèdres P, P′.

Exception. — Il peut y avoir exception lorsque du point A on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire sur les rayons partant du point σ. C'est ce qui arrive lorsque les deux figures se réduisent à deux triangles semblables dont les bases passent par le point σ.

III. — *On donne deux droites* L, L′ *situées d'une manière quelconque dans l'espace, deux points* A, A′ *situés sur ces droites et un rapport* ρ *: mener un plan* P *parallèle à un plan donné* Q *qui coupe les deux droites en deux points* M, M′ *tels que l'on ait* $\frac{A'M'}{AM} = \rho$.

Si on fait déplacer le point M sur L, le point M′ se déplace sur L′ dans un sens que l'on suppose connu, et trace une division semblable à celle de M ; il s'agit de faire passer le plan cherché par deux points homologues de ce système.

Sur les droites L, L′ je mettrai des flèches dans les sens ou les divisions semblables vont en croissant, si ρ est positif. Si ρ est négatif il faut changer le sens d'une des deux flèches. J'appelle angle des droites l'angle formé par deux demi-droites partant d'un même point O et étant parallèles à L,L′ et dans les sens des flèches. J'appelle bissecteur des droites le plan perpendiculaire au plan de cet angle O et contenant la bissectrice de l'angle.

L'axe de similitude du système formé par les deux divisions semblables doit être tel que par une rotation convenable de L′ autour de cet axe, cette droite L′ devienne parallèle à L, les flèches ayant le même sens. Il faut donc que cet axe fasse des angles égaux avec les flèches des droites, et par suite qu'il soit parallèle à leur bissecteur.

1° Je suppose que le plan donné Q soit perpendiculaire au bissecteur des droites. Soit l' la projection de L′ sur le plan passant par L et parallèle à L′, et OZ la bissectrice de l'angle l'OL ; c'est la trace du plan bissecteur des droites. Du point O j'abaisse sur le plan Q une perpendiculaire Ox ; elle est contenue dans le plan bissecteur, et par suite fait des angles égaux avec les droites données L, L′. On peut donc prendre Ox pour axe de similitude du système formé par les deux divisions semblables et la droite double Ox. Soit P le plan cherché, parallèle à Q, coupant les droites aux points homologues M, M′. Comme ce plan est perpendiculaire à l'axe de similitude et qu'il contient les deux points homologues M, M′ c'est le plan double du système. De là cette construction.

Je tire la corde AA′, je la divise au point α dans le rapport donné ρ et par ce point α je mène un plan parallèle au plan donné Q ; c'est le plan cherché.

2° Le plan donné Q n'est pas perpendiculaire au plan bissecteur.

Je remarque que les droites L, L′ et les cordes AA′, BB′, CC′ qui joignent leurs points homologues définissent une paraboloïde hyperbolique. Pour

définir ce paraboloïde je puis conserver L et remplacer L' par une autre génératrice L''; je choisis celle-ci de manière que le nouveau plan bissecteur de l'angle formé par L et L'' soit perpendiculaire à Q, et je retombe sur le premier cas.

IV. — *On donne dans l'espace deux angles égaux* xAy, x'A'y' *et une droite* l *dans le plan du premier : mener un plan, parallèle à* l, *qui en coupant les plans des deux angles détermine deux triangles semblables ayant un rapport de similitude égal au nombre donné* ρ.

Dans l'angle xAy je forme un triangle ABC dont la base BC soit parallèle à l, et dans l'angle $x'Ay'$ je forme un triangle semblable en prenant $A'B' = \rho \cdot AB$ et $A'C' = \rho \cdot AC$. J'ai ainsi défini complètement un système de deux figures semblables. Cependant il y aurait ambiguité si le triangle ABC était isoscèle avec BC pour base. Le plan cherché coupant les plans donnés suivant MN parallèle à BC et M'N' parallèle à B'C', doit être parallèle au plan de ces deux droites. La question est donc ramenée à construire un plan parallèle à un plan donné, et coupant les deux droites homologues ABx, A'B'x' en deux points homologues : c'est le problème précédent.

QUESTION 706

Par le sommet A d'un angle donné BAC, on mène une droite quelconque δ et l'on construit les paraboles P_1, P_2 tangentes, l'une aux droites AB, δ, l'autre, aux droites AC, δ et qui admettent toutes deux un point donné F pour foyer. Si p_1, p_2 sont les points où ces paraboles touchent leur tangente commune δ, on demande de démontrer que l'angle p_1Fp_2 est constant.

Vve F. Prime.

Solution, par M. **A. Droz-Farny**

Si d'un point A quelconque on mène deux tangentes AB et AC à une parabole de foyer F, on sait que l'angle FBA = FAC; conséquence évidente du théorème bien connu que la circonférence circonscrite à un triangle circonscrit à une parabole passe par le foyer de cette dernière. On aura donc :

$$\begin{aligned} \text{angle } Fp_2 &= FAC \\ \text{angle } Fp_1A &= FAB \\ \hline Fp_2A - Fp_1A &= BAC \quad \text{pour soustraction.} \\ < p_1Fp_2 &= BAC. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

A. D. F.

Ont résolu les mêmes questions : MM. Ernest Foucart, Francis Dauzats, L'huillier, Sollerskinsky.

Le Directeur-gérant,
GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^T-CYR

155. — Aux extrémités du diamètre AC d'un cercle O, on mène les tangentes AB et CD, et des points B et D, les autres tangentes BE et DF qui se coupent en M ; on tire enfin les droites DE et BF qui se rencontrent en N.

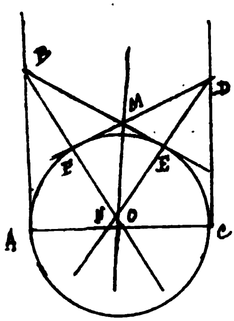


Fig. 1

Démontrer que les droites BD, FE et AC se coupent en un même point I et que MN est la polaire de ce point.

Déterminer le lieu des points M et N lorsque :

$\frac{AB}{CD}$ ou $AB \times CD$, ou $AB \pm CD$ sont constants.

H. Lecocq, ancien professeur de l'Université.

156. — On donne une circonférence et on demande de trouver une corde AB telle qu'en abaissant la perpendiculaire AC on ait en menant OI perpendiculaire à CB on ait :

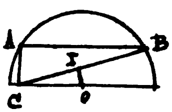


Fig. 2

$$\frac{\text{surf } ABC}{\text{surf } COI} = m.$$

Edouard Drouet.

157. Epure. Pyramide et cylindre. — La pyramide SABCD a sa base ABCD dans le plan de projection.

$\widehat{A} = 90°$, $\overline{AB} = 90$ millimètres, $AD = CD = 100$ millimètres
$BC = 115$ millimètres — ABCD

est un quadrilatère convexe. Hauteur de la pyramide : 52 millimètres. Plus courte distance de SD et AB : 70 millimètres $SD = 95$ millimètres. S se projette intérieurement à ABCD.

Le cylindre de révolution a pour axe CS et pour rayon 5 centimètres.

Lire à la quatrième page de la couverture les conditions relatives à la correction et à l'abonnement des copies.

1° Représenter la partie de la pyramide extérieure au cylindre.

2° Déterminer les points les plus bas des sections faites par les faces SAB et SAD.

Note. — On pourra prendre la trace horizontale du cylindre pour directrice du cylindre à la condition de l'avoir déterminée exactement.

158. Calcul. — On donne les 3 côtés d'un triangle :

$$a = 25\,648^{m} \qquad b = 32\,907^{m} \qquad c = 29\,763^{m}.$$

Calculer les 3 angles, la hauteur CH et la surface du triangle.

159. Questions d'oral. — Conditions de divisibilité d'un polygone entier $f(x)$ par $(x - a)^2$ et $(x - a)^3$.

Barbarin,
professeur au Lycée de Bordeaux.

160. — On trace un cercle de rayon R. Deux cercles de rayon R' et R'' tels que $R = R' + R''$ sont tangents intérieurement en A et en B au cercle de rayon R. Ces deux cercles se coupent en E. Démontrer que l'arc AB sur la grande circonférence égale la somme des arcs AE + EC.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

161. Mathématiques. — Une suite de sphères homogènes CC' C''..... en nombre illimité et tangentes extérieurement sont inscrites dans un même cône de révolution dont l'ouverture est 2ω. La distance a du sommet S du cône au centre C de la sphère la plus éloignée est connue. On demande : 1° D'exprimer au moyen de a et de ω la distance x du sommet du cône au centre de gravité de l'ensemble des sphères ; on devra trouver en particulier que pour $\omega = 30°$, $x = \frac{39}{4a^2}$. 2° Ce que devient x pour $x = 0$ et pour $\omega = 0$. 3° Démontrer que quand ω varie de 0 à 90° x va toujours en augmentant.

162. — Dans un solide formé de deux cônes égaux appliqués l'un contre l'autre par leurs bases on propose d'inscrire le cylindre dont la surface totale soit maximum.

163. — Calculer par logarithmes :

$$x = \sqrt[7]{\pi R^2 \left(R' + R'' + \sqrt{R'R''}\right)}$$

pour $R = 3^{m}$, $R' = 0^{m},012$, $R'' = 9^{m},99$.

164. Physique et chimie. — Dans un appareil de Morin le cylindre a trois mètres de haut, il fait exactement un tour en une seconde. Sur sa surface sont tracées 100 génératrices équidistantes. Combien le poids en rencontrera-t-il en tombant dans sa chute ? — Construction d'un thermomètre, déplacement des points 0 et 100. — Enoncer les systèmes cristallins et donner des exemples à chaque cas.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES MATHÉMATIQUES

165. Mathématiques. — (*Obligatoire*) Trouver par les progressions la somme des nombres renfermés dans la table de multiplication si on la prolonge jusqu'à 100 fois 100.

166. — (*Au choix*) Propriété de la tangente à l'hélice.

Démontrer la relation entre le carré d'une corde (d'une parabole) perpendiculaire à l'axe et sa distance au sommet.

Mener à une ellipse une normale parallèle à une direction donnée.

167. Physique. — (*Obligatoire*) 8 litres d'hydrogène à une pression correspondant à 74 centimètres de mercure sont mélangés avec 3 litres d'oxygène, à une pression correspondant à 76 centimètres de mercure, les deux gaz étant à une température de 14°. Le volume total est réduit à 10 litres. A quelle température faut-il porter le mélange pour que la pression devienne la pression initiale de l'oxygène. Coefficient de dilatation des gaz : $\frac{1}{273}$.

168. — (*Au choix*) Photométrie, photomètres de Bouguer, de Bunsen, de Foucault, de Runford, de Wheatstone.

Lois de la réfraction ; démonstration expérimentale.

Etablir la formule des miroirs convexes (convention de signes).

IV. — BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT MODERNE

169. Mathématiques. — (*Obligatoire*) Les trois angles d'un triangle forment une progression géométrique dont la raison est 1/4. Quels sont ces angles ?

169 bis. — (*Au choix*) Calculer sin $2a$, cos $2a$, tg $2a$, limite

de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers o. Tranformer en produit la somme de deux cosinus.

170. Physique. — (*Obligatoire*) Un projectile est lancé de bas en haut avec une vitesse de 300 mètres par seconde. On demande à quelle hauteur il s'élèvera. 2° Au bout de combien de temps reviendra-t-il à son point de départ.

170 bis. — (*Au choix*) Loi de Mariotte ; manomètre ; mélange des gaz et des vapeurs.

V. BACCALAURÉAT (LETTRES. — SCIENCES)

171. — Démontrer que les trois points ABC de coordonnées A ($x = 1 \quad y = 2$), B ($x = 2 \quad y = 3$), C ($x = 3 \quad y = 4$) sont en ligne droite.

2° Former l'équation de la droite qui passe par les points A ($x = 0 \quad y = 2$), B ($x = 3 \quad y = 0$).

172. — (*Au choix*) Lois de Kepler ; inégalité des saisons. Calendrier ; projection de Mercator.

173. Physique. — Dans un récipient contenant de l'air sec à la pression 755, on fait le vide jusqu'à la pression x. On ouvre le robinet et on fait entrer de l'hydrogène jusqu'à ce que le mélange ait de nouveru la pression 755. On fait de nouveau le vide et on fait arriver de nouveau de l'hydrogène jusqu'à la pression de 755 millimètres. Quelle doit être la valeur de x, pour que le poids de l'hydrogène soit 1/10 du poids de l'air avec lequel il est mélangé.

174. — (*Au choix*) Bobine de Ruhmkorff; éclairage électrique ; microphone.

VI. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

175. — Un piéton part à 8 heures du matin, il fait 1 kilomètre en 9 minutes, il se repose 3 minutes après chaque kilomètre. A quelle heure sera-t-il rejoint par un courrier qui part dans le même sens à midi, fait 9 kilomètres à l'heure et se repose 20 minutes chaque fois qu'il a parcouru 20 kilomètres.

Vazou.

176. — Trois bateaux partent du même point le même jour. On demande dans combien de jours ils repartiront ensemble

sachant que le premier part de ce point tous les cinq jours, le deuxième tous les sept jours et le troisième tous les onze jours.

177. — Calculer x donné par la formule :

$$x = \frac{\sqrt{3789} - \sqrt[3]{29023} + \sqrt{7089} - \sqrt[5]{0,0007}}{\pi^2}$$

VII. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

178. — On doit à une personne 14 720 francs, à la fin de chaque année on lui donne 2000 francs. Pour combien de temps sera-t-elle entièrement payée, le taux d'intérêt étant 6 %.

179. Algèbre. — Résoudre $2x = 3y = 4z$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 10.$$

180. — Calculer x donné par la formule :

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{(0,0023)^5} \times \left[\sqrt[7]{73921} - \sqrt[5]{2378}\right]^9}{\left[\sqrt[2]{(2329)^{\frac{3}{4}}} + 257392^2\right]\left(\sqrt{\pi^3}\right)^{\frac{1}{3}}}}$$

DEUXIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, *par* EMILE MARTIN *et* FÉLIX PERNOT, *à la librairie des sciences générales*, 53, *rue Monsieur le Prince*, 53.

Ce nouveau cours de Géométrie répond à un besoin. Le programme de Saint-Cyr exigeant l'emploi (presque exclusif) de la Géométrie cotée, il était nécessaire, de mettre entre les mains des candidats, un ouvrage clair pouvant les guider dans cette voie. Mieux que personne, MM. Martin et Pernot étaient désignés pour rédiger un cours répondant à cette nécessité. Anciens élèves de l'École Polytechnique, professeurs tous les deux dans les meilleures écoles préparatoires de Paris, ils ont apporté dans ce travail la méthode scientifique qui caractérise en France l'enseignement donné dans nos grandes écoles, et l'expérience du professeur. D'ailleurs, l'emploi simultané des trois méthodes (méthode cotée et méthodes de Monge) est une innovation qui rend de réels services et aux maîtres et aux élèves. Nous recommandons cet ouvrage avec plaisir et conviction aux candidats à Saint Cyr et Navale. Jusqu'à présent, pas un livre répondant à leurs programmes n'a été rédigé avec cette clarté et cette hauteur de vue qui distingue l'enseignement de MM. Martin et Pernot. G. M.

SOLUTION DE LA QUESTION 37

On donne une surface conique de révolution à deux nappes dont le 1/2 angle au sommet est de 60°. On la coupe par deux plans perpendiculaires à l'axe et dont la distance est h. On obtient ainsi un tronc de cône. Calculer la distance x du sommet à la base la plus éloignée, sachant que le volume de ce tronc est dans un rapport donné m avec celui de la sphère dont le diamètre est h. Discussion.

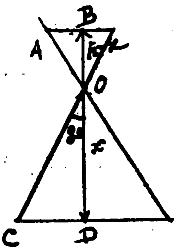


Fig. 3

Il faut trouver x tel que

$$\frac{\text{V. tronc}}{\text{Vol. sphère}} = m.$$

ou

$$\frac{\frac{hx}{3}\left(\overline{AB}^2 + CD^2 - AB.CD\right)}{\frac{4}{3}\pi h^3} = m.$$

Nous avons : $CD = X \operatorname{tg} 30^\circ, \quad = x\sqrt{3}$

$AB = (h - x)\sqrt{3}$

en portant dans la valeur de m on a :

$$m = \frac{3(h - x)^2 + 3x^2 - 3x(h - x)}{4h^2}$$

d'où l'équation :

(1) $$9x^2 - 9hx + h^2(3 - 4m) = 0.$$

Discussion :

1°) pour que les racines soient réelles, il faut :

$$36mh^2 - 18h^2 > 0, \quad \text{ou} \quad m - 2 > 0;$$

2°) produit $= h^2(3 - 4m)$ dont le signe est celui de $3 - 4m$;

3°) somme $= h9$ toujours > 0.

Nous remarquons que les racines de l'équation (1) sont les deux distances OB et OD car si x est racine $h - x$ est aussi racine.

Comme la somme est au > 0 la plus grande racine est positive. Il faut que m soit > 2 pour que les racines soient réelles, le produit est donc < 0, nous voyons qu'elles sont de signes contraires, et que la plus grande dépend du sens adopté sur la droite BD.

E. Drouet.

SOLUTION DE LA QUESTION 42

Par M. **Léopold Massip**, professeur de Mathématiques Spéciales à l'École Saint-Georges

Etant donné une circonférence tangente aux deux côtés d'un angle droit, mener une troisième tangente qui forme avec les deux autres un triangle maximum ou minimum.

Considérons la tangente supérieure BC : si nous relevons le point B suivant la ligne AB, le triangle formé augmente jusqu'à devenir infini quand la tangente est parallèle à AB ; si nous éloignons le point C suivant AC, la même chose arrive ; donc le triangle a passé par un minimum, et comme tout est symétrique des 2 côtés, il aura lieu pour la tangente à 45°.

De même AMN passe par un maximum dans le même cas.

Pour traiter par le calcul

soit : $AB = y, \quad AC = x$

et posons

(1) $$xy = m^2.$$

On a $BF = y - R \quad CE = x - R.$

Donc

(2) $$(x + y - 2R)^2 = x^2 + y^2.$$

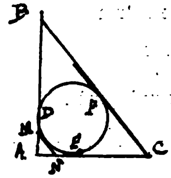


Fig. 4

Cette équation renferme les 2 cas ; car elle ne change pas quand on y remplace $x - R$ et $y - R$ par $R - x$ et $R - y$.

L'équation se simplifie et s'écrit :

$$2xy + 4R^2 = 4R(x + y)$$

ou

$$\frac{m^2}{2R} + R = x + y.$$

Donc x et y sont les deux racines de l'équation

$$z^2 - \left(R + \frac{m^2}{2R}\right) z + m^2 = 0.$$

Pour que ces racines soient réelles, il faut que l'on ait

$$\left(R + \frac{m^2}{2R}\right)^2 > 4m^2$$

ou

$$m^4 - 12R^2m^2 + 4R^4 > 0.$$

Décomposons en facteurs :

$$\left\{ m^2 - 2R^2(3 + 2\sqrt{2})\right\} \left\{ m^2 - 2R^2(3 - 2\sqrt{2})\right\} > 0$$

ce qui exige que l'on ait

$$m^2 - 2R^2(3 - 2\sqrt{2}) < 0,$$

ou

$$m^2 - 2R^2(3 + 2\sqrt{2}) > 0.$$

La première condition donne le maximum $m^2 = 2R^2(3 - 2\sqrt{2})$ et la seconde le minimum $m^2 = 2R^2(3 + 2\sqrt{2})$

x et y sont égaux entre eux et à

$$\frac{m^2 + 2R^2}{4R}$$

ce qui donne pour les valeurs maxima de m^2 :

$$x = y = R(2 - \sqrt{2})$$

et pour la valeur minima : $x = y = R(2 + \sqrt{2})$. **Léopold Massip.**

SOLUTION DE LA QUESTION 74

Par M. **Léopold Massip**, professeur à l'École préparatoire Saint-Georges

Résoudre
$$x^2 - y\sqrt{xy} = a^2$$
$$y^2 - x\sqrt{xy} = b^2,$$

on a :
$$x^2 - a^2 = y\sqrt{xy}$$
$$y^2 - b^2 = x\sqrt{xy}$$

multiplions membre à membre

$$x^2y^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = x^2y^2,$$

d'où :
$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$
d'où
$$b^2(x^2 - a^2) = - a^2y^2$$
de même
$$(x^2 - a^2)^2 = xy^3,$$
on a :
$$x^2 - a^2 = - \frac{a^2y^2}{b^2},$$
remplaçant :
$$\frac{a^4y^4}{b^4} = xy^3 \quad \text{d'où :} \quad \frac{a^4y^4}{b^4} = x.$$
Remplaçant dans
$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$
on a :
$$a^2y^2 + b^2\left(\frac{a^8y^2}{b^8}\right) - a^2b^2 = 0,$$
d'où
$$y^2(b^6 + a^6) = b^8$$
$$y^2 = \frac{b^8}{b^6 + a^6} \qquad x^2 = \frac{a^8}{b^6 + a^6}.$$
Léopold Massip.

SOLUTION DE LA QUESTION 83

Un tube de verre, ayant à l'intérieur la forme d'un cylindre droit à base circulaire, a un diamètre intérieur de 2 millimètres à 0° et renferme une colonne de mercure dont la longueur à cette température de 0°, est de 2 décimètres. On demande quelle serait à la température de 20°, la nouvelle longueur de la colonne liquide. Le coefficient de dilatation cubique du mercure est de $\frac{1}{5550}$, *celui du verre de* $\frac{1}{58700}$.

Solution. — Le volume de mercure à zéro a pour expression en millimètres cubes, $\pi \times 200$. A la température de 20°, on a $\pi \times 200 \times \frac{557}{555}$.

A la même température, la base du cylindre de mercure est devenue
$$\pi \times \left(1 + \frac{2 \times 2}{3 \times 3870}\right) = \pi \times \frac{11614}{11610}.$$
La hauteur actuelle de ce cylindre est exprimée, en millimètres, par la fraction
$$200 \times \frac{557}{555} \times \frac{11614}{11610}.$$
Le calcul, effectué par logarithmes, donne pour la hauteur demandée 200^{mm},65.

Léopold Massip.

TROISIÈME PARTIE

NOTE SUR LA DROITE DE THOMAS SIMPSON

Par M. **Grand,** professeur à l'École Saint-Georges

Le théorème de Simpson employé dans la théorie des transversales n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général ainsi conçu :

Si on mène dans le plan d'un triangle ABC *une transversale quelconque* $\alpha\beta\gamma$ *et qu'aux points ainsi déterminés on mène des droites faisant avec les côtés adjacents des angles égaux, on obtient un triangle* A'B'C' *semblable à* ABC ; *et, de plus, si on joint les sommets homologues, ces*

trois droites coucourent en un même point situé à l'intersection des cercles circonscrits aux deux triangles.

En effet, le quadrilatère $A\beta A'\gamma$ est inscriptible, puisque l'on a :

$$\widehat{C\beta A'} = \widehat{A\gamma A'}.$$

Par suite, $\widehat{A'} = \widehat{A}$, on démontrerait que $B = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = C'$.

Les deux triangles ABC et A'B'C' sont donc semblables.

De plus, si nous joignons AA' et BB' qui se rencontrent en un point O, nous voyons que le quadrilatère $B\alpha B'\gamma$ étant inscriptible, on a : $\widehat{B'B\alpha} = \widehat{\alpha\gamma B'}$.

De même, $\beta A\gamma A'$ étant inscriptible, on a : $\widehat{\beta AA'} = \widehat{\beta\gamma A'} = \widehat{B'B\alpha}$.

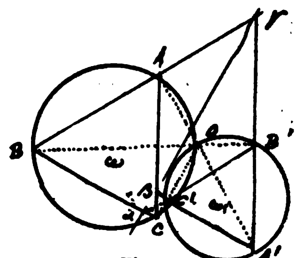


Fig. 5

Le quadrilatère OABC est donc inscriptible, et le point O se trouve sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Il est de toute évidence que, l'intersection de BB' et CC' se trouvant sur ce même cercle ne peut se trouver qu'au point O.

De plus, A'B'C' étant réciproque de ABC, le point O appartient aussi à son cercle circonscrit. Il est donc à l'intersection de ces deux cercles.

Réciproquement. Etant donnés 2 cercles se coupant en O *et un triangle* ABC *inscrit dans le premier, si on joint les sommets* A, B, C *au point* O, *on forme le triangle* A'B'C' *semblable à* ABC. *Les côtés homologues se coupent en des points* $\alpha\beta\gamma$ *en ligne droite et sous des angles égaux.*

En effet, on a : $\widehat{C'} = \widehat{A'OB'}$ même mesure.

$\widehat{C} = \widehat{AOB}$ même mesure.

D'où $\widehat{C} = \widehat{C'}$

De même, $A = A'$, $B = B'$; les deux triangles sont semblables.

Il en résulte que le quadrilatère $A\gamma A'B$ par exemple est inscriptible, et que l'on a : $\widehat{AB\gamma} = \widehat{AA'\gamma}$

De même pour $\alpha\beta CC'$, et on a :

$$\widehat{\alpha\beta C} = \widehat{\alpha C'C} = \widehat{OC'B'} = \widehat{OA'B'} = \widehat{AA'\gamma}.$$

Les angles $\widehat{A\beta\gamma}$ et $\widehat{\alpha\beta C}$ étant égaux, $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ coïncident en direction.

Donc $\alpha\beta\gamma$ est une ligne droite.

De la considération des quadrilatères inscriptibles tels que $A\beta A'\gamma$, on déduit : $\widehat{C\beta A'} = \widehat{A\gamma A}$ et $\widehat{C\beta A'} = \widehat{C\alpha\beta}$.

Les angles sous lesquels se coupent les côtés homologues sont donc égaux.

Remarque : Si les angles égaux ont une valeur égale à un droit, on a le théorème de Simpson, et la droite $\alpha\beta\gamma$ est la droite de Simpson.

Grand, Professeur de Mathématiques (Paris).

NOTE DE TRIGONOMÉTRIE par M. **Rafalli** (Lycée de Pau)

En seconde moderne, pour résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris, le programme prescrit de démontrer géométriquement les

formules de résolution. Dans les ouvrages, actuellement entre les mains des élèves, on construit sur le triangle l'angle $\frac{B-C}{2}$ et on en tire les formules. Mais on a encore besoin d'une autre construction pour la formule

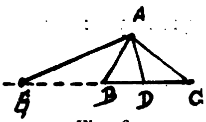


Fig. 6

$$\frac{b-c}{b+c} = \operatorname{tg}(45^\circ = m), \quad \text{où} \quad \operatorname{tg} m = \frac{c}{b}.$$

Il me semble que la méthode suivante est plus facile à retenir.

Soit ABC un triangle, on suppose connus b, c et A. Soient AD, AE les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A. *Je considère le triangle* ABD *et j'écris la relation des sinus.*

J'obtiens
$$\frac{BD}{\sin DAB} = \frac{C}{\sin ADB}.$$

Or
$$BD = \frac{ac}{b+c}; \quad ADB = 90 - \frac{B-C}{2}.$$

La relation devient donc
$$\frac{ac}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{c}{\cos\frac{B-C}{2}},$$

d'où

(1)
$$a = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

En écrivant de même la relation des sinus dans le triangle ABE on obtient la 2e formule

(2)
$$a = \frac{(b-c)\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}.$$

En divisant (1) et (2) membre à membre on obtient enfin

(3)
$$\operatorname{Tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$

Les formules (1) (2) (3) résolvent le problème.

Dans la dernière, supposons le triangle rectangle, elle devient en remplaçant B par 90 — C

$$\operatorname{Tg}(45^\circ - C) = \frac{b-c}{b+c}, \quad \text{où l'on a} \quad \operatorname{tg} C = \frac{c}{b}.$$

C'est la formule employée dans le cas où l'on connait non pas b et c, mais $\log b$ et $\log c$.

SOLUTION DE LA QUESTION 708

On projette un point P d'une corde focale FCD d'une parabole sur les tangentes aux extrémités de cette corde. Démontrer que la droite qui joint ces projections est une tangente à la parabole. (**Lucien Lévy**).

SOLUTION

Les tangentes aux extrémités C, D de la corde focale sont perpendicu-

laires et l'on sait que le sommet A de l'angle droit qu'elles forment est situé sur la directrice.

Si par le point P on mène des parallèles à ces tangentes elles déterminent deux points, C' sur la tangente en C et D' sur la tangente en D, tels que C'D' est tangente à la parabole ; comme C', D' sont les projections orthogonales de P sur les tangentes, la question est démontrée.

Pour déterminer le point de contact de la tangente C'D' on mène la médiane correspondante au sommet A du triangle ACD ; cette médiane coupe la tangente C'D' en un point E, si l'on prend sur cette tangente C'F = D'E, le point F est le point de contact. **Jorge F. d'Avillez.**

Solutions exactes par MM. **Ernest Foucart, Droz-Farny, L'Huillier, Francis Dauzats, St-Goyens.**

THÉORÈME DE KEMPE par M. **Ernesto** à Montévideo.

On donne un losange ABCD, un point O sur une de ses diagonales ; on forme ainsi un quadrilatère AOCD à diagonales rectangulaires ; sur OC considéré comme côté homologue de CD, on construit un quadrilatère OCLM semblable à DAOC, prouver que la droite AM est perpendiculaire sur AB.

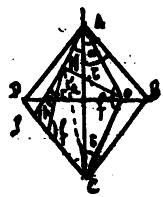


Fig. 7

DÉMONSTRATION

Puisque MOCL est semblable à COAD, les angles correspondants de ces quadrilatères sont égaux.

Faisons

$$\text{BAC} = \text{OMC} = a ; \quad \text{OAC} = \text{OCA} = \text{CML} = b,$$

$$\text{AOC} = \text{MLC} = f \begin{cases} \text{PML} = c, \\ \text{PAC} = d, \\ \text{APC} = h. \end{cases}$$

Le triangle MOA est isoscèle ; donc OMA = OAM = $b + d$.

On a aussi $\text{OMA} + \text{OML} + \text{LMP} = 2dr$,

ou $b + d + a + b + c = 2dr$,

ou encore

(1) $2b + a + d + c = 2dr$.

Mais $2b + f = 2dr$ et $h + c = f$,

(1) devient successivement

$$2b + a + d + c = 2b + f \quad \text{ou} \quad a + d + c = f,$$

ou enfin $a + d + c = h + c$, ce qui donne $a + d = h$.

Donc BAP = APC.

A cause des parallèles AB et DC, on a aussi BAP = APD.

Par suite APC = APD.

Chacun de ces deux angles vaut donc $1dr$.

Donc AP est perpendiculaire sur DC et par suite sur sa parallèle AB.

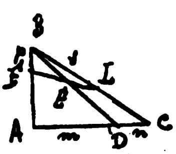


Fig. 8

On donne un triangle ABC ; on trace BD que divise AC en deux parties AD = m ; DC = n ; du même point B on porte sur

BC une longueur BL $= s$, et sur BA une longueur BF $= p$; on trace LF. Dans quel rapport la droite BD divise-t-elle la sécante LF ?

SOLUTION

Les deux triangles BFE, BEL ayant même hauteur sont entre eux comme leur base.

On a donc $$\frac{\text{BFE}}{\text{BEL}} = \frac{\text{FE}}{\text{EL}}.$$

D'autre part, on peut écrire $\frac{\text{BFE}}{\text{BAD}} = \frac{\text{BF} \times \text{BE}}{\text{BA} \times \text{BD}}$, et $\frac{\text{BDC}}{\text{BEL}} = \frac{\text{BD} \times \text{BC}}{\text{BE} \times \text{BL}}$.

En multipliant entre eux ces deux rapports, et en se rappelant que $\frac{\text{BDC}}{\text{ABD}} = \frac{n}{m}$, on obtiendra successivement

$$\frac{\text{BFE}}{\text{BEL}} \times \frac{\text{BDC}}{\text{BAD}} = \frac{\text{BF.BE.BD.BC}}{\text{AB.BD.BE.BL}} = \frac{p.a}{s.c}$$

ou $$\frac{\text{FE}}{\text{EL}} \times \frac{n}{m} = \frac{pa}{sc}.$$

D'où

(1) $$\frac{\text{FE}}{\text{EL}} = \frac{mp}{ns} \cdot \frac{a}{c}.$$

Remarques : I — Pour BD médiane, $m = n$, et le rapport (1) devient

(2) $$\frac{\text{FE}}{\text{EL}} = \frac{p}{s} \cdot \frac{a}{c}.$$

II. — Si, en même temps que $m = n$, on a aussi $p = s$, il vient

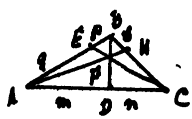
(3) $$\frac{\text{FE}}{\text{EL}} = \frac{a}{c}.$$

Ce qui justifie le théorème connu :

La médiane BD d'un triangle ABC coupe la corde FL d'un arc décrit du sommet B et limité aux côtés du triangle en deux parties FE, FL dont le rapport est inverse de celui des côtés AB, BC.

III. — Pour $s = a$, le rapport (1) se réduit à $\frac{\text{FE}}{\text{EC}} = \frac{mp}{nc}$.

Il semble bon d'établir directement cette propriété à cause des conséquences qu'on en peut tirer.


Fig. 9

On donne un triangle ABC ; on trace BD qui divise AC en deux parties AD $= m$, DC $= n$; on trace aussi CE qui divise AB en deux parties AE $= q$, EB $= p$.

Déterminons les rapports $\frac{\text{EF}}{\text{FC}}$, $\frac{\text{DF}}{\text{FB}}$, F étant le point de rencontre des lignes BD et CE.

SOLUTION

On peut écririre immédiatement $\frac{\text{BEF}}{\text{BFC}} = \frac{\text{EF}}{\text{FC}}$.

On a aussi $$\frac{\text{BEF}}{\text{BAD}} = \frac{\text{BE.BF}}{\text{BA.BD}}, \quad \frac{\text{BDC}}{\text{BFC}} = \frac{\text{BD}}{\text{BF}}.$$

En multipliant entre eux ces deux derniers rapports, il vient

$$\frac{\text{BEF}}{\text{BFC}} \times \frac{\text{BDC}}{\text{BAD}} = \frac{\text{BE.BF.BD}}{\text{BA.BD.BF}} = \frac{p}{c}.$$

Comme $\frac{BEF}{BFC} = \frac{EF}{FC}$, et $\frac{BDC}{BAD} = \frac{n}{m}$, on obtient $\frac{EF}{FC} \times \frac{n}{m} = \frac{p}{c}$.
D'où

(1) $$\frac{EF}{FC} = \frac{mp}{nc}.$$

On aurait de même

(2) $$\frac{DF}{FB} = \frac{qn}{pb}.$$

Remarques. I. — Joignons A au point F si le point H où AE rencontre BC divise cette ligne en deux parties BH = s, HC = r, on aura aussi

(3) $$\frac{HF}{AF} = \frac{pr}{qa} = \frac{ns}{ma}.$$

Dans ce cas, on aurait

(4) $$\left\{ \frac{EF}{FC} = \frac{mp}{nc} = \frac{sq}{rc}, \quad \frac{DF}{FB} = \frac{qn}{pb} = \frac{rm}{sb}, \quad \frac{HF}{FA} = \frac{pr}{qa} = \frac{ns}{ma}. \right.$$

II. — Si le point F était extérieur au triangle ABC, on obtiendrait les mêmes relations (4), en employant les mêmes notations.
Ainsi pour BE $= p$, AE $= q$, AD $= m$, DC $= n$, BM $= s$, CH $= r$, on aura

(4bis) $$\left\{ \frac{EF}{FC} = \frac{mp}{nc} = \frac{sq}{c}, \quad \frac{DF}{FB} = \frac{qn}{pb} = \frac{rm}{sb}, \quad \frac{HF}{FA} = \frac{pr}{qa} = \frac{ns}{ma}. \right.$$

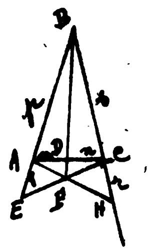


Fig. 10

Démontrons-le pour l'un de ces rapports, par exemple $\frac{EF}{FC}$.

On a comme auparavant $\frac{BEF}{CBF} = \frac{EF}{FC}$, $\frac{BEF}{BAD} = \frac{BE.BF}{BA.BD}$, $\frac{BDC}{BFC} = \frac{BD}{BF}$.

Multipliant entre eux ces deux rapports, simplifiant $\frac{BEF}{BFC}$ par $\frac{EF}{BC}$ et $\frac{BDC}{BAO}$ par $\frac{m}{n}$, il vient $\frac{EF}{FC} \cdot \frac{n}{m} = \frac{p}{c}$ ou $\frac{EF}{FC} = \frac{mp}{nc}$.

CONSÉQUENCES

I. — L'un quelconque des rapports (4) et (4bis) donne

$$mpr = nsq.$$

Ce qui démontre le théorème de Céva.

II. — Ces relations peuvent aussi s'employer pour démontrer le théorème de Ménélaüs.

1er *Cas.* — La sécante EFD coupe deux côtés et le prolongement du troisième. Soit le triangle ABC et la sécante AD. Joignons BD, AF.

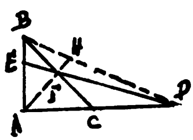


Fig. 11

Les relations (4) donnent

$$\frac{CF}{BF} = \frac{HD.AC}{BH.AD} = \frac{AE.CD}{BE.AD}.$$

On en tire $$\frac{HD}{BH} = \frac{AE.CD}{AC.BE}.$$

Ce qui donne

$$\frac{CE}{BF} = \frac{AE.CD}{AC.BE} \times \frac{AC}{AD} = \frac{AE.CD}{BE.AD}.$$

Donc $$CF.BE.AD = BF.AE.CD.$$

2[e] *Cas*. — La sécante EDF coupe le prolongement des trois côtés. Soit le triangle ABC et la sécante ED. Traçons AF. On a

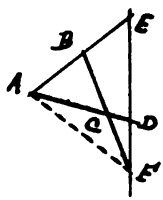


Fig. 12

$$\frac{BC}{CF} = \frac{ED.AB}{DF.AE} \quad \text{ou} \quad \frac{BF}{CF} = \frac{ED.AB + DF.AE}{DF.AE},$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB.EF}{BE.DF} \quad \text{ou} \quad \frac{AD}{CD} = \frac{AB.EF + BE.DF}{BE.DF},$$

$$\frac{BF}{CF} \times \frac{CD}{AD} = \frac{ED.AB + DF.AE}{DF.AE} \times \frac{BE.DF}{AB.EF + BE.DF}$$

$$= \frac{BE}{AE} \times \frac{ED.AB + DF.AE}{AB.EF + BE.DF}.$$

Mais $ED.AB + DF.AE = AB.EF + BE.DF.$

Car, en le supposant vrai, on obtiendrait

$$DF.AE - DF.BE = AB.EF - AB.ED,$$

ou $$DF(AE - BE) = AB(EF - ED),$$

ou $$DF.AB = AB.DF, \text{ ce qui est évident.}$$

Ainsi donc $\dfrac{BF}{CF} \times \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{BE}{AE}$, ou $BF.CD.AE = CF.AD.BE.$

Le théorème de Ménélaüs se trouve ainsi vérifié.

III. — Soit F, le point de rencontre de deux médianes CE, BD. Dans ce cas, on a

$$m = n = \frac{b}{2}; \quad p = q = \frac{c}{2}.$$

On aura $$\frac{EF}{FC} = \frac{mp}{nc} = \frac{m.\frac{c}{2}}{m.c} = \frac{1}{2}.$$

De même, en appelant F', le point où la médiane AH' rencontrerait CE, on aurait aussi $BH' = s' = H'C = r'$. Et on obtiendrait également

$$\frac{EF'}{F'C} = \frac{s'q}{r'c} = \frac{s'\frac{c}{2}}{s'c} = \frac{1}{2}.$$

Donc le point F' se confond avec F. Et les trois médianes se coupent au même point.

$$\frac{EF + FC}{FC} = \frac{1 + 2}{2}\frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{FC}{CE} = \frac{2}{3},$$

et ce point est situé aux $\frac{2}{3}$ de chacune d'elles à partir du sommet.

IV. — Soit encore F le point de rencontre de deux hauteurs BD, AH et appelons F', le point de rencontre des hauteurs BD et CE'; cette dernière divisant le côté AB en deux parties $AE' = q'$, $BE' = p'$.

Les triangles semblables CE'B et ABH donnent $\dfrac{p'}{a} = \dfrac{s}{c}$.

De même AHC et BDC » $\dfrac{r}{b} = \dfrac{n}{a}$,

» ABD et AE'C » $\dfrac{m}{c} = \dfrac{q'}{b}$.

En les multipliant on obtient $p'rm = snq'$ ou $\dfrac{rm}{s} = \dfrac{q'n}{p'}$.

Mais, en appliquant les relations (4) précédentes, on a

$$\frac{FD}{BF} = \frac{rm}{sb} \quad \text{et} \quad \frac{F'D}{BF'} = \frac{qn'}{p'b}.$$

En remplaçant $\frac{qn'}{p}$ par sa valeur $\frac{rm}{s}$, il vient $\frac{F'D}{BF'} = \frac{rm}{sb}$.

Donc $\frac{F'D}{BF'} = \frac{FD}{BF}$ et F′ se confond avec F. Par suite, les trois hauteurs d'un triangle se coupent au même point.

Remarque. — On trouverait facilement les relations suivantes :

$$\frac{BD}{BF} = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{2b^2(a^2 + c^2 - b^2)}$$

$$\frac{CE}{FE} = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{2c^2(a^2 + b^2 - c^2)}$$

$$\frac{AH}{AF} = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{2a^2(b^2 + c^2 - a^2)}.$$

V. — Soient BD bissectrice de B, AH bissectrice de A, CE′ bissectrice de C, F le point de rencontre des bissectrices BD et AH, F′ le point de rencontre de BD et CE′. Les relations (4) donnent :

$$\frac{PD}{BF} = \frac{r}{s} \cdot \frac{m}{b} \quad \text{et} \quad \frac{F'D}{BF'} = \frac{q'}{p'} \cdot \frac{n}{b}$$

(en appelant q' et p' les deux segments de AB, m et n ceux de AC, r et s ceux de BC).

On a
$$\frac{r}{s} = \frac{b}{c}; \quad \frac{q'}{p'} = \frac{b}{a}; \quad \frac{m}{n} = \frac{a}{c};$$

$$\frac{m}{n+m} \text{ ou } \frac{m}{b} = \frac{c}{a+c} \text{ et } \frac{n}{m+n} \text{ ou } \frac{n}{b} = \frac{a}{a+c}.$$

Par suite
$$\frac{FD}{BF} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a+c} = \frac{b}{a+c},$$

$$\frac{F'D}{BF'} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{a+c} = \frac{b}{a+c}.$$

Donc $\frac{FD}{BF} = \frac{F'D}{BF'}$, et F′ se confond avec F. Par conséquent, les trois bissectrices d'un triangle se coupent au même point.

Remarques. I. — Les segments des bissectrices seront exprimés par les rapports suivants :

$$\frac{FD}{BF} = \frac{b}{a+c} \quad \text{ou} \quad \frac{BD}{BF} = \frac{a+b+c}{a+c},$$

$$\frac{FE}{CF} = \frac{c}{a+b} \quad \text{ou} \quad \frac{CE}{EF} = \frac{a+b+c}{a+b},$$

$$\frac{FH}{AF} = \frac{a}{b+c} \quad \text{qu} \quad \frac{AH}{AF} = \frac{a+b+c}{b+c}.$$

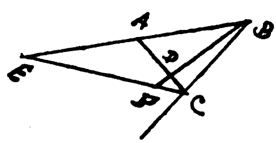


Fig. 13

II. — On démontrerait de même que les bissectrices de B et des angles extérieurs en A et en C se coupent au même point. En appelant F ce point on aurait de même

$$\frac{FD}{BF} = \frac{b}{a+c}$$

et en appelant F′ le point de rencontre de la bissectrice de A et de celles

des angles extérieurs en B et en C; F′ le point de rencontre des bissectrices de C et des angles extérieurs en A et en B, on aura les trois relations :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{BF}} = \frac{b}{a+c} \text{ ou } \frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{BD}} = \frac{b}{a+c-b} \text{ ou } \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BF}} = \frac{a+c\,b}{a+c} \\ \frac{\mathrm{F'H}}{\mathrm{AF'}} = \frac{a}{b+c} \text{ ou } \frac{\mathrm{F'H}}{\mathrm{AA}} = \frac{a}{b+c-a} \text{ ou } \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AF'}}\ \frac{b+c-a}{b+c} \\ \frac{\mathrm{F''E}}{\mathrm{CF''}} = \frac{c}{a+b} \text{ ou } \frac{\mathrm{F''E}}{\mathrm{CE}} = \frac{c}{a\ b-c} \text{ ou } \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CF''}}\ \frac{a+b-c}{a+b}. \end{array}\right.$$

VI. — (4) et (4bis) donnent

$$\frac{\mathrm{EF.FD.HF}}{\mathrm{FC.BF.AF}} = \frac{mpr}{abc} = \frac{nsq}{abc}$$

Hermano Ernesto.

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE

SUR LES PROBLÈMES D'ALGÈBRE

De MM. **Henri Neveu** et **Charles Cochez**

La librairie Larousse met en vente les *Problèmes d'Algèbre* à l'usage des candidats à Saint-Cyr. L'autorité acquise par les auteurs de ce livre (MM. Henri Neveu et Charles Cochez) en tout ce qui concerne les matières de l'examen à l'Ecole spéciale militaire de Saint-Cyr, doit encourager les élèves et les candidats, qui désirent passer brillamment leurs examens, à prendre connaissance de ce recueil. L'ordre et la clarté qui y règnent le distinguent de tous les recueils similaires. En un mot c'est un ouvrage bien fait que nous signalons avec plaisir à l'attention des professeurs et des élèves.

G. M.

Le Directeur-gérant,

GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER), IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^{T}-CYR

181. — 1° Inscrire dans un triangle ABC rectangle en A une droite B'C' de longueur K s'appuyant sur AB et AC et telle que, en menant en C' et B' les perpendiculaires aux côtés AB et AC ces perpendiculaires se coupent en A' sur BC. — Solutions algébrique et géométrique. Variation de la surface A'B'C' lorsque K varie.

2° On donne deux circonférences C et C' de rayon R et R'. Mener par leur centre S de similitude directe une droite sur laquelle la circonférence C intercepte une corde BD $= l$ et calculer la corde B'D' interceptée sur cette même droite par la circonférence C'.

Charles Cochez.
Professeur du Cours de Saint-Cyr à l'Ecole préparatoire Saint-Georges.

182. Epure. — Le sommet d'un cône de révolution de côte 12 se projette au centre de la feuille. La circonférence de base a 0,05 de rayon, ce cône est limité par un plan horizontal de côte 20. Un point C de côte 12 situé à une distance 0,05 du sommet se projette sur la parallèle aux petits côtés du cadre passant par le centre de la feuille. Par le point C_{12} passent trois plans, le premier a sa trace horizontale tangente au cercle de base en un point C_1 diamètralement opposé au point C. Le deuxième a sa trace parallèle à la précédente et passe par le point O. Cette trace rencontre la base du cône aux points BD. Le troisième plan a sa trace passant par B et le milieu de l'arc BS. Solide commun au cône et au trièdre ainsi défini.

Léopold Massip,
Professeur de Mathématiques Spéciales à l'Ecole Saint-Georges.

Lire à la quatrième page de la couverture les conditions relatives à la correction et à l'abonnement des copies.

183. Calcul trigonométrique. — Résoudre un triangle connaissant

$$a = 8344,27 \qquad b = 5862,55 \qquad C = 128°47'35''.$$

184. Questions d'oral. — *a*) Trouver le cercle dans lequel on ne peut entrer.

b) Déterminer la hauteur d'un triangle dont on connaît les trois côtés mais dont l'intérieur est inaccessible.

c) Calculer le rayon de la sphère connaissant les rayons des deux bases ainsi que sa hauteur.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

185. — A l'intérieur d'une circonférence on donne un point P. En ce point se trouve une balle élastique. Dans quelle direction faut-il lancer cette balle pour qu'elle revienne à son point de départ après avoir frappé trois fois la circonférence ?

Solution algébrique et géométrique.

Léon Bach,
expert-géomètre à Cahors.

186. — Si dans un triangle on a : $\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C$ le triangle est isocèle.

187. — Calculer par logarithmes

$$x = \frac{Am\,(1+\alpha)^p}{(1+\beta)p-2}$$

pour $A = 38500 \quad \alpha = 0,038 \quad p = 11 \quad \beta = 0,035.$

188. Physique et Chimie. — Un baromètre a été observé à deux époques différentes et a donné 770 millimètres à 25° et 760 millimètres à 5°.

On demande le rapport entre les deux hauteurs corrigées.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES MATHÉMATIQUES

189. Mathématiques. — Couper un cône par un plan de façon que la section elliptique ait une aire maximum.

190. (*Au choix*). — *a*) Résolution trigonométrique de l'équation du second degré.

b) Limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers zéro.

c) Problème de la carte.

190bis. Physique. — Deux miroirs AB et CD inclinés ont leurs faces réfléchissantes en regard ; un rayon lumineux se réfléchit d'abord sur AB suivant IH puis sur CD suivant HR. Démontrer que l'angle δ formé par la direction du rayon incident avec celle du rayon deux fois réfléchi est toujours double de l'angle α des deux miroirs.

191. (*Au choix*). — *a*) Rosée, pluie, neige.

b) Hygromètre de condensation.

c) Ebullition, distillation.

IV. — BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT MODERNE

192. Mathématiques. — Déterminer a de manière que les deux équations

$$ax^2 - (5 + a)x + 6 = 0 \qquad 2ax^2 - (5a + 1)x + 6 = 0$$

aient une racine commune dont on donnera la valeur.

192bis. (*Au choix*). — *a*) Condition nécessaire et suffisante pour qu'un angle droit se projette suivant un angle droit.

b) Projection d'une hélice sur un plan parallèle à l'axe.

c) Projection d'un cercle.

193. Physique. — Trouver la longueur d'un tuyau d'orgue ouvert dont le son fondamental est à l'unisson avec le diapason normal.

193bis. (*Au choix*). — *a*) Notions très sommaires de photographie.

b) Notions générales sur les phénomènes d'émission, de réflexion, de transmission de la chaleur rayonnante.

c) Composition de la lumière blanche.

V. BACCALAURÉAT (LETTRES. — SCIENCES)

Trouver la dérivée de

$$y = \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}.$$

$$y = x \sin. x + \cos. x$$

194bis. (*Au choix*). — *a*) Formule d'addition des arcs.

b) Duplication et bissection des arcs.

c) Théorème des projections.

195. Physique. — Un tuyau fermé de $0^m,50$ de longueur donne l'harmonique 3. Quel est le rang de cet harmonique dans l'échelle musicale.

195bis. (*Au choix*). — *a*) Machine d'Atwood.

b) Pendule. — Applications.

c) Densité des gaz.

VI. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

196. — Le colza d'hiver rend en moyenne 32 °/₀ de son poids d'huile et la navette d'été 30 °/₀. Dans une fabrique on a obtenu avec 4 700 kilogrammes de graines des deux espèces 1 468 kilogrammes d'huile. 1° Combien a-t-on employé de kilogrammes de graines de chaque espèce? Combien a-t-on obtenu d'huile de chaque espèce?

197. — Quelle est la surface d'un trapèze dont la hauteur a 12 mètres et les bases $48^m,50$ et 25.

198. — Calculer $x \dfrac{\sqrt[7]{3789} + \sqrt[3]{27004} + \sqrt[4]{6745}}{\sqrt[3]{0,0012} + \sqrt{7777} - \sqrt{0,0050}}$.

VII. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

199. — Pour obtenir une tonne de fer brut une usine emploie 1 130 kilogrammes de fonte à 130 francs la tonne et 750 kilogrammes de houille à 32 francs la tonne; elle paie en outre 12 francs pour la main-d'œuvre; elle a produit 2777630 kilogrammes de fer brut; on demande ce qu'elle a dû dépenser en tout tant pour la fonte que pour le combustible et la main-d'œuvre.

200. Algèbre. — Vérifier l'identité

$$(a^2 + b^2 + ab)^2 = a^2 (a + b)^2 + b^2 (a + b)^2 + a^2b^2.$$

200bis. — Même calcul qu'au numéro 198.

DEUXIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

Récréations et Problèmes de Mathématiques des temps anciens et modernes, par W. W. Rause Ball, traduites par J. Fitz-Patrick (Librairie scientifique *A. Hermann*, 8, rue de la Sorbonne).

Quelques pédagogues ont soutenu qu'il y a deux manières d'enseigner les mathématiques : La première consistant, comme on le fait en France, à énoncer les théorèmes pour les démontrer ensuite, en évitant une objection de la part de l'élève. La seconde, employée par quelques professeurs anglais, consisterait à émettre des idées fausses pour permettre aux élèves de les discuter, à faire des fautes de calcul ou de raisonnement habilement cachées, lesquelles conduisent à la démonstration de choses absurdes afin de laisser aux jeunes intelligences le plaisir et le soin de découvrir l'erreur. Nous rappelons ces procédés à propos des *Recréations Mathématiques* que M. Fitz-Patrick vient de traduire.

La lecture de cet ouvrage nous a fort intéressé. Les quelques problèmes de géométrie où l'auteur démontre qu'un segment de droite égale la droite entière, que tous les triangles sont isoscèles sont habilement établis et la sagacité du lecteur est fort exercée.

Les carrés magiques, les problèmes des jeux, le problème des huit reines, des quinze écolières.......... sont des chapitres à lire ; ils intéresseront et les gens du monde, et les mathématiciens. Nous recommandons la lecture de cet ouvrage à tous les élèves des classes de sciences, même aux candidats à Polytechnique, Centrale, Normale ; elle ne peut que leur délier l'esprit, et elle leur montrera quelle critique il faut apporter dans les raisonnements, quelle attention il faut donner au calcul. G. M.

Nota. — Lire dans le *Journal de Mathématiques Spéciales* l'article blibliographique consacré à *La Mathématique* de Laisant (Librairie *Carré et Naud*, 3, rue Racine).

SOLUTION DE LA QUESTION 106

Par **Léonce Gerlach**, à Digne

Construire $x = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Ecrivons $x = t\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ $(t = 1)$.

Décrivons le cercle de rayon $t = 1$. Prenons M milieu de OA'. BB' perpendiculaire en $M = \sqrt{3} = A'B''$. Rabattons A'B'' en A'D, $AD = 2 - \sqrt{3}$ et on a $x = t\sqrt{AD}$, $x^2 = t.AD$, x est donc une moyenne proportionnelle entre t et AD. On mène I tangent au cercle OD et $AI = x$.

Construire $x = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}}$, on a $x = t\sqrt{\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}}$ $(t = 1)$. Décrivons

le cercle de rayon I. Construisons de même $\sqrt{3}$, joignons OB et traçons OD

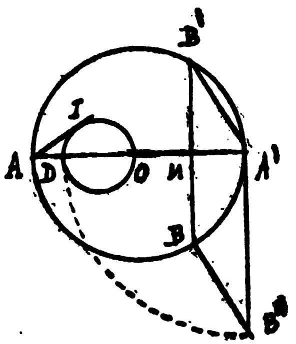


Fig. 1

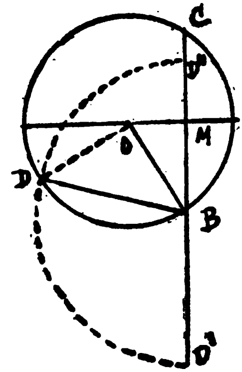


Fig. 2

perpendiculaire à OB, DB $= \sqrt{2}$. Rabattons BD en BD', CD' $= \sqrt{3} + \sqrt{2}$. De même CD'' $= \sqrt{3} - \sqrt{2}$ et on a $x = t\sqrt{\frac{CD'}{CD''}}$, $\frac{x^2}{t^2} = \frac{CD'}{CD''}$.

SOLUTION DE LA QUESTION 121

Par **Crut**

On donne deux circonférences tangentes extérieurement de rayons R *et* r. *On mène la tangente commune* AB (A *sur la circonférence de rayon* R *et* B *sur celle de rayon* r). *Soit* C *le point de contact des deux circonférences : on forme le triangle* ACB. *Démontrer que ce triangle est rectangle et exprimer ses côtés en fonction de* R *et* r. **Léopold Massip.**

Soient O et O' les centres des cercles de rayons R et r, I le milieu de AB. La tangente en C aux deux circonférences passe par le point I. On a donc CI = IA = IB, ce qui indique que le point C est situé sur la circonférence de diamètre AB. Le triangle ACB est donc rectangle en C.

Calculons d'abord l'aire du triangle ACB. Soit H la projection de C sur AB. On a $\frac{CH}{CS} = \frac{r}{O'S} = \frac{R}{OS} = \frac{R - r}{R + r} = \frac{R - CH}{OS - CS} = \frac{R - CH}{R}$.

La comparaison du 4e et du 6e rapport donne immédiatement

$$CH = \frac{2Rr}{R + r}. \quad \text{On a aussi } IB = \sqrt{Rr}.$$

On a donc pour l'aire S du triangle ACB

$$S = CH \times IB = \frac{2Rr\sqrt{Rr}}{R + r} = \frac{1}{2}.AC.CB.$$

Il en résulte que les côtés AC et CB sont donnés par les équations

$$AC.CB = \frac{4Rr\sqrt{Rr}}{R + r}, \quad \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = 4Rr.$$

On en déduit $(AC + CB)^2 = \frac{4Rr(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}{R + R}$, $(AC - CB)^2 = \frac{4Rr(\sqrt{R} - \sqrt{r})^2}{R + r}$,
et, par suite, les trois côtés du triangle ACB s'écrivent

$$AC = \frac{2R\sqrt{r}}{\sqrt{R + r}}, \quad BC = \frac{2r\sqrt{R}}{\sqrt{R + r}}, \quad AB = 2\sqrt{Rr}.$$

(Crut).

TROISIÈME PARTIE

Questions diverses

Un quadrilatère articulé, plan et vertical, repose, par son côté AD = d *sur une droite horizontale. Les côtés* a, b, c, d *ont une section infiniment petite, et des poids proportionnels à leurs longueurs,* ε *étant le poids de l'unité.*

Démontrer que si l'on a la relation :

$$\frac{(a + b)\cos A}{d \sin A - c \sin (A + D)} = \frac{(c + b)\cos D}{d \sin D - a \sin (A + D)},$$

le quadrilatère est en équilibre.

Calculer les réactions Q *et* Q' *détruites aux points* A *et* D.

Et vérifier que, dans la position d'équilibre, le centre de gravité du périmètre mobile a + b + c *est le plus haut (équilibre instable) ou le plus bas possible (équilibre stable ; figure symétrique par rapport à l'horizontale) eu égard aux mouvements compatibles avec les articulations du système.*

1° Soit ABCD la figure d'équilibre du quadrilatère articulé et vertical, reposant par son côté d sur l'horizontale fixe AD. Prolongeons les côtés opposés AB et DC jusqu'à leur rencontre en S. Les conditions d'équilibre ne seront modifiées en rien, si l'on suppose que SBA et SCD soient rigides.

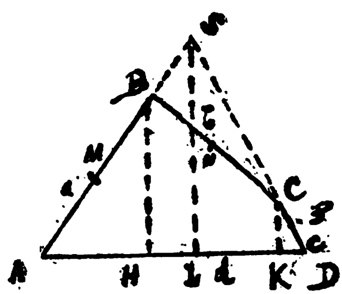


Fig. 3

Or, le poids $a\varepsilon$ appliqué au milieu M de AB peut se décomposer en $\frac{1}{2}a\varepsilon$ appliqué en A, détruit par la fixité de l'horizontale, et en $\frac{1}{2}a\varepsilon$ appliqué en B. Parallèlement, le poids $c\varepsilon$ appliqué en P, milieu de CD, se décompose en $\frac{1}{2}c\varepsilon$, détruit en D, et en $\frac{1}{2}c\varepsilon$ appliqué en C.

Soit I le point d'application de la résultante des trois forces verticales $\frac{a\varepsilon}{2}$, $\frac{c\varepsilon}{2}$ et $b\varepsilon$ ayant respectivement leurs points d'application en B, C et N

milieu de BC. Pour que cette résultante soit détruite, il faut que la verticale menée par S passe par I; les composantes Q et Q′ de ce poids $\frac{1}{2}(a+c+2b)\varepsilon$, suivant les directions SA et SD seront détruites sur BA et CD par les réactions égales et contraires.

Or $$\frac{\mathrm{IB}}{\mathrm{IC}}=\frac{\mathrm{LH}}{\mathrm{LK}}=\frac{c+b}{a+b}, \quad \text{d'où}$$

(1) $$\frac{\mathrm{LH}}{c+b}=\frac{\mathrm{LK}}{a+b}=\frac{d-a\cos \mathrm{A}-c\cos \mathrm{C}}{a+c+2b},$$

H et K étant les projections de B et C, d'autre part :

$$\mathrm{SL}=\mathrm{LA}\ \mathrm{tg}\ \mathrm{A}=\mathrm{LD}\ \mathrm{tg}\ \mathrm{D},$$

d'où $$(a\cos \mathrm{A}+\mathrm{LH}\ \mathrm{tg}\ \mathrm{A})=(c\cos \mathrm{C}+\mathrm{LK})\ \mathrm{tg}\ \mathrm{D},$$

en remplaçant, dans cette dernière, les expressions de LH et LK tirées de (1), on arrivera, après simplifications, à l'équation proposée.

On calculera Q et Q′ par les relations

$$\frac{\mathrm{Q}}{\cos \mathrm{D}}=\frac{\mathrm{Q}'}{\cos \mathrm{A}}=\frac{\left(\frac{a}{2}+\frac{c}{2}+b\right)\varepsilon}{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{D})}.$$

Les réactions totales développées en A et D sont donc respectivement : Q dirigée suivant AS, composée avec la force verticale $-\frac{1}{2}a\varepsilon$, et Q′ dirigée suivant DS, composée avec la force verticale $-\frac{1}{2}c\varepsilon$.

2° Actuellement déformons le quadrilatère selon les mouvements compatibles avec les articulations, lesquels, pour B ou C, se réduisent à une rotation autour de A ou D. Remplaçons par x et y les angles variables BAD et CDA, et désignons par Y la distance à AD du centre de gravité du périmètre pesant $a+b+c$. En prenant les moments par rapport à AD, on aura, après suppression du facteur commun ε,

$$\mathrm{Y}(a+c+2b)=a\frac{a}{2}\sin x+b\left(\frac{a\sin x+c\sin y}{2}\right)+c\frac{c}{2}\sin y$$
$$=\frac{a}{2}(a+b)\sin x+\frac{c}{2}(c+b)\sin y,$$

d'où en prenant la dérivée des deux membres par rapport à une variable indépendante dont x et y seraient fonctions :

$$2(a+c+2b)\frac{d\mathrm{Y}}{du}=a(a+b)\cos x\frac{dx}{du}+c(c+b)\cos y\frac{dy}{du}.$$

Mais x et y sont liées par la relation :

(2) $$d-a\cos x-c\cos y=\sqrt{b^2-(a\sin x-c\sin y)^2}, \quad \text{d'où}$$

(3) $$a\sin x\frac{dx}{du}+c\sin y\frac{dy}{du}=-\frac{(a\sin x-c\sin y)\left(a\cos x\frac{dx}{du}-c\cos y\frac{dy}{du}\right)}{d-a\cos x-c\cos y},$$

or, le maximum ou le minimum de Y satisfont à :

(4) $$a(a+b)\cos x\frac{dx}{du}+c(c+b)\cos y\frac{dy}{du}=0,$$

en éliminant le rapport $\frac{dy}{du}=\frac{dx}{du}$ entre (3) et (4) on arrivera bien à l'équation : $$\frac{(a+b)\cos x}{d\sin x-c\sin(x+y)}=\frac{(c+b)\cos y}{d\sin y-a\sin(x+y)}.$$

la même que l'équation proposée. Cette dernière, jointe à (2), fera connaître les angles x et y, c'est-à-dire l'élément de la figure d'équilibre.

H. Lecocq.
ancien professeur au lycée d'Avignon.

Etant données quatre droites AB, BC, CD, DE, *déterminer la position d'un point* P (*fig.* 2) *tel que les symétriques* P_1, P_2, P_3, P_4, *de* P *par rapport à ces lignes soient sur une même droite.*

Le problème inverse qui consiste à trouver la position des quatre droites, connaissant le point P et les quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 se résout immédiatement en menant des perpendiculaires au milieu de PP_1, PP_2, PP_3 et PP_4.

Pour découvrir la solution du problème proposé, cherchons d'abord le lieu géométrique des points P (*fig.* 1) dont les symétriques P_1, P_2, P_3, par rapport aux trois droites données AB, BC, CD soient en ligne droite.

Observons d'abord que les points B, C et E point de rencontre de AB et DC, font partie du lieu, puisque, dans ces positions, P coïncide avec deux de ses symétriques, et il est facile de démontrer que le lieu cherché est la circonférence O circonscrite au triangle BEC. En effet, soient O_1, O_2, O_3, les symétriques de O par rapport aux côtés BC, CE et BE de ce triangle; décrivons, de ces points comme centres, des circonférences égales à la première; elles se couperont en un point I, point de rencontre des trois hauteurs du triangle BEC.

Par le point I menons une droite quelconque qui rencontre en P_1, P_2, P_3 les circonférences O_1, O_2, O_3 et soit P le symétrique de P_1 par rapport à BC. Les figures OIO_2C et O_1IO_3B sont des losanges. Tirons O_1P_1 et menons O_2H et O_3K parallèles à cette ligne, les droites CH et BK seront égales et parallèles à IP_1. Il résulte de là que l'arc P_1IC, ou son symétrique PC est égal à l'arc CHP_2; donc P est le symétrique de P_2 par rapport à CD. On verrait de même que P est le symétrique de P_3 par rapport à BA. La propriété est donc démontrée.

Cela étant, la solution du problème proposé se trouve aisément. Considérons (*fig.* 2) les trois premières droites AB, BC et CD, et menons le cercle circonscrit au triangle BEC; puis, les trois droites BC, CD, DE et menons le cercle circonscrit au triangle CFD. Soit P le point de rencontre des deux circonférences décrites; P est le point cherché, car P_1, P_2, P_3, d'une part, et P_2, P_3, P_4, d'autre part sont en ligne droite; donc les quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 le sont. Cette ligne passe par les points de rencontre M et N des trois hauteurs de chacun des triangles BEC et CFD. **H. Lecocq.**

COROLLAIRE I. — Si d'un point quelconque de la circonférence circonscrite à un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, les trois pieds sont en ligne droite.

COROLLAIRE II. — Si du centre O du cercle circonscrit à un quadrilatère inscriptible on abaisse une perpendiculaire OP sur la troisième diagonale, les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur les quatre côtés du quadrilatère sont en ligne droite.

NOTE DE MÉCANIQUE

Par M. **Léopold Massip**, professeur de Mathématiques spéciales
à l'Ecole préparatoire Saint-Georges

Les élèves retiennent fort peu la démonstration du parallélogramme des forces : nous proposons la démonstration suivante qui nous semble plus simple : soit la force AB contenant 3 fois la force OB. Décomposons la force OA en trois forces égales à OB appliquées en O, O_1, O_2 ; les forces OB et OO_1, étant égales ont une résultante dirigée suivant OB'. Je transporte le point

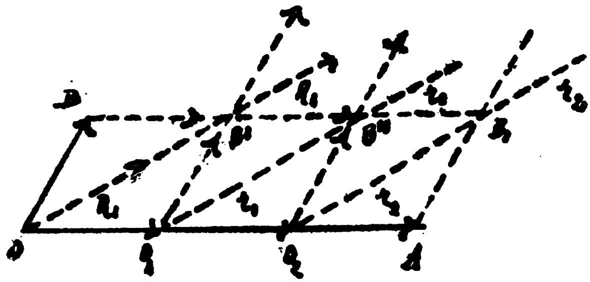


Fig. 4

d'application O de cette force en B' suivant B'R'. En B' je remplace la force B'R' par deux forces B'B" et B'O'. Je transporte la force B'O' suivant O_1B' et la force B'B" suivant BB'. Je recommence la même opération pour chacune des forces O_1O_2 et O_2OA. **Léopold Massip.**

APPLICATION DES RELATIONS MÉTRIQUES
ET TRIGONOMÉTRIQUES ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **H. Lecocq**

Les données α, β, γ, δ, qu'elles soient primitives ou consécutives, et dépendant alors, par les tableaux du n° 17 des côtés du quadrilatère ou des autres éléments tels que diagonales et angles qui en sont des fonctions connues, permettent de résoudre, par des procédés plus réguliers et uniformes, les différents cas de détermination de la figure ; la construction finale est alors des plus simples et toujours la même, lorsqu'on a réussi à résoudre les inconnues ou variables α, β, γ, δ en fonction des constantes qui caractérisent l'espèce du cas proposé.

Mais la multiplicité des éléments considérés et introduits simultanément dans un problème posé amène parfois ce résultat qu'une relation, ignorée *a priori*, entre les quatre constantes nécessaires à la détermination du quadrilatère inscrit rend ce problème indéterminé, ou le transforme en question de lieux géométriques pour les quatre sommets, ou pour tout autre point lié au quadrilatère, et que ces mêmes lieux géométriques, di-

rectement cherchés, sont identiques lorsqu'on donne trois de ces constantes sur quatre, quelle que soit celle qu'on laisse de côté.

Les exemples qui suivent feront mieux comprendre ces considérations.

1° Problèmes déterminés.

I. — Données : $a + c$, $d + b$, $\hat{S}$ et $\hat{Q}$.

On aura les relations suivantes, n° 17.

$$\frac{4\gamma^2\beta\delta\sqrt{\delta^2 + \alpha^2}}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2} = a + c \qquad \frac{4\delta^2\alpha\gamma\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2} = d + b,$$

et d'ailleurs : $\frac{\delta}{\alpha} = \operatorname{cotg}\frac{S}{2} \qquad \frac{\gamma}{\beta} = \operatorname{cotg}\frac{Q}{2}$

on en déduit :

$$\alpha = (d + b)\sin\frac{Q}{2}\operatorname{tg}\frac{S}{2} \times \frac{\cos\left(\frac{S - Q}{2}\right)\cos\left(\frac{S + Q}{2}\right)}{\sin S \sin Q},$$

$$\beta = (a + c)\sin\frac{S}{2}\operatorname{tg}\frac{Q}{2} \times \frac{\cos\left(\frac{S - Q}{2}\right)\cos\left(\frac{S + Q}{2}\right)}{\sin S \sin Q},$$

$$\gamma = (a + c)\sin\frac{S}{2} \times \frac{\cos\left(\frac{S - Q}{2}\right)\cos\left(\frac{S + Q}{2}\right)}{\sin S \sin Q},$$

$$\delta = (d + b)\sin\frac{Q}{2} \times \frac{\cos\left(\frac{S - Q}{2}\right)\cos\left(\frac{S + Q}{2}\right)}{\sin S \sin Q}.$$

En laissant de côté le facteur commun à ces expressions, on pourra construire facilement un quadrilatère semblable au proposé, et une application d'homothétie fera le reste.

II. — Données $a + c$, $d + b$, m et n.

On peut ramener ce cas au précédent en prenant pour auxiliaires $\frac{S}{2}$ et $\frac{Q}{2}$ qui sont liées aux données par les relations :

$$(m + n)^2 - (m + n)^2\left(\cos^2\frac{S}{2} + \cos^2\frac{Q}{2}\right) - 4mn\cos^2\frac{S}{2}\cos^2\frac{Q}{2} = 0$$

$$(a + c)^2\cos^2\frac{S}{2} + (d + b)^2\cos^2\frac{Q}{2} = (m + n)^2$$

d'où l'on tirera $\cos\frac{S}{2}$ et $\cos\frac{Q}{2}$; en y remplaçant $\cos\frac{2S}{2}$ et $\cos\frac{2Q}{2}$ par $\frac{1 + \cos S}{2}$ et $\frac{1 + \cos Q}{2}$ on aura, au lieu d'équations bi-carrées en $\cos\frac{S}{2}$ et $\cos\frac{Q}{2}$, des équations du second degré en cos S et cos Q.

On peut encore résoudre la question de la manière suivante. Des tableaux n° 17 et du n° 18, on tire :

$$(1) \quad \frac{4\beta\delta\gamma^2\sqrt{\delta^2 + \alpha^2}}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2} = a + c \qquad (2) \quad \frac{4\alpha\delta^2\gamma\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2} = d + b.$$

$$(3) \quad \frac{2\delta\gamma\sqrt{\beta^2\alpha^2}(\delta\gamma + \alpha\beta)}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2} = m \qquad (4) \quad \frac{2\delta\gamma\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}(\delta\gamma - \beta\alpha)}{\delta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2} = n,$$

posons $\frac{\beta}{\alpha} = x, \frac{\gamma}{\alpha} = y, \frac{\delta}{\alpha} = z,$

et divisons membre à membre les équations (3) et (4) ; (1) et (3) ; (2) et (4) ; on aura :

$$(5) \qquad \frac{x}{zy} = \frac{m-n}{m-n},$$

et en éliminant x des deux suivantes, on obtiendra :

$$(6) \qquad (m-n)y\sqrt{1+z^2} = (a+c)\sqrt{1+\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 y^2z^2}$$

$$(7) \qquad (m+n)\sqrt{1+\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 z^2} = (d+b)\sqrt{1+\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 y^2z^2}$$

de cette dernière on tirera z^2 qui, substitué dans (6), fournira :

$$(d+b)^2(m-n)^2y^4-(m+n)^2\left[(a+c)^2+(d+b)^2-4mn\right]y^2+(a+c)^2(m+n)^2=0$$

et l'équation en z sera :

$$(m-n)^2\left[(m+n)^2-(a+c)^2\right]z^4-(m-n)^2\left[(a+c)^2+(d+b)^2-4mn\right]z^2$$
$$+(m+n)^2\left[(m+n)^2-d+b^2\right]=0.$$

Les données doivent nécessairement vérifier les inégalités géométriques

$$m+n > a+c \qquad m+n > d+b.$$

On devra en outre, pour la réalité des racines, poser les inégalités

$$(a+c)^2+(d+b)^2-4mn \geqslant 0$$
$$m\varepsilon^2+4p^2n-4mn(m+n) \geqslant 0$$

dans cette dernière $2p$ représente le périmètre $(a+c)+(d+b)$ et $\varepsilon = (a+c)-(d+b)$.

III. — Données : m, n, f et la droite $OI = \Delta$ qui joint le centre au point de concours des diagonales.

On aura les quatre équations suivantes :

$$(1) \qquad \frac{2\delta\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\delta\gamma-\alpha\beta} = m \qquad (2) \qquad \frac{2\delta\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\delta\gamma+\alpha\beta} = n$$

$$(3) \qquad \frac{2\alpha\beta\gamma\delta\sqrt{\delta^2+\gamma^2}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2} = f \qquad (4) \qquad \frac{\delta\gamma(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\delta^2+\gamma^2}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2} = \Delta$$

de (1) et (2) on déduit :

$$\frac{\delta\gamma}{\alpha\beta} = \frac{m+n}{m-n} \qquad \text{et} \qquad \alpha^2+\beta^2 = \frac{m^2n^2}{(m+n)^2}$$

ensuite de (3) $\sqrt{\delta^2+\gamma^2} = \dfrac{2mnf}{m^2-n^2}$ et enfin, de (4) $\delta\gamma = \dfrac{m^2n^2f}{2\Delta(m^2-n^2)}$

d'où $$\alpha\beta = \frac{m^2n^2f}{2\Delta(m+n)^2}$$

on en conclut les couples α, β et γ, δ, savoir :

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{mn}{m+n}\left(\sqrt{1+\frac{f}{\Delta}} \pm \sqrt{1-\frac{f}{\Delta}}\right)$$
$$\beta = \frac{1}{2}\frac{mn}{m+n}\left(\sqrt{1+\frac{f}{\Delta}} \pm \sqrt{1-\frac{f}{\Delta}}\right)$$
$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{mn}{\sqrt{m^2-n^2}}\left(\sqrt{\frac{4f^2}{m^2-n^2}+\frac{f}{\Delta}} \pm \sqrt{\frac{4f^2}{m^2-n^2}-\frac{f}{\Delta}}\right)$$
$$\delta = \frac{1}{2}\frac{mn}{\sqrt{m^2-n^2}}\left(\sqrt{\frac{4f^2}{m^2-n^2}+\frac{f}{\Delta}} \pm \sqrt{\frac{4f^2}{m^2-n^2}-\frac{f}{\Delta}}\right)$$

2° Problèmes pseudo-déterminés. Equation de condition. Lieux géométriques des sommets ou d'autres points liés au quadrilatère.

On cite un philosophe de l'antiquité dont l'intelligence était si pénétrante qu'il apercevait en un instant toutes les conséquences d'une question posée, en sorte que, pour lui, les distinctions établies ci-dessus eussent été absolument inutiles. Bien que cet état d'esprit soit fort enviable, il n'est nullement nécessaire, les progrès de la solution conduisant au même résultat.

IV. — Données $m, n, \hat{S}$ et $\hat{Q}$.

Comme dans l'exemple précédent, les données m et n donnent :

$$(1) \quad \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} = \frac{m+n}{m-n} \quad \text{et} \quad (2) \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{m^2n^2}{(m+n)^2}.$$

D'ailleurs on a

$$(3) \quad \frac{\alpha}{\delta} = \operatorname{tg}\frac{S}{2} \quad \text{et} \quad (4) \quad \frac{\beta}{\gamma} = \operatorname{tg}\frac{Q}{2}.$$

On en conclut :

$$\operatorname{tg}\frac{S}{2} \quad \operatorname{tg}\frac{Q}{2} = \frac{m-n}{m+n}$$

cette relation entre les quatre constantes m, n, $\hat{S}$ et $\hat{Q}$ réduit le système d'équations distinctes à trois; en leur adjoignant les expressions des coordonnées x et y d'un des sommets en fonction de α, β, γ, δ (n° 17). On aura alors cinq équations entre lesquelles on pourra éliminer ces variables et l'on obtiendra l'équation du lieu.

On trouvera de la sorte, pour A (signe inférieur) et C (signe supérieur)

$$\left[(m+n)^2 + (m-n)^2\operatorname{cotg}^2\frac{Q}{2}\right]y^2 \pm 2(m^2-n^2)\left(\operatorname{cotg}\frac{S}{2} + \operatorname{cotg}\frac{Q}{2}\right)xy$$

$$+\left[(m+n)^2+(m-n)^2\operatorname{cotg}^2\frac{S}{2}\right]x^2 - \frac{m^2\left[(m+n)^2-(m-n)^2\operatorname{cotg}\frac{S}{2}\operatorname{cotg}\frac{Q}{2}\right]}{4(m+n)^2} = 0$$

pour B (signe supérieur) et D (signe inférieur)

$$\left[(m+n)^2 + (m-n)^2\operatorname{cotg}^2\frac{Q}{2}\right]y^2 \pm 2(m^2-n^2)\left(\operatorname{cotg}\frac{S}{2} - \operatorname{cotg}\frac{Q}{2}\right)xy$$

$$+\left[(m+n)^2+(m-n)^2\cot^2\frac{S}{2}\right]x^2 - \frac{n^2\left[(m+n)^2+m-n)^2\operatorname{cotg}\frac{S}{2}\operatorname{cotg}\frac{Q}{2}\right]}{4(m+n)^2} = 0.$$

On voit que les points A, B, C. D décrivent les périmètres de secteurs orthogonaux d'ellipses ayant pour centre commun le point L. Le lieu de O est une ellipse rapportée à son centre et à ses axes.

V. — Données : $\frac{a}{c}$, $\frac{d}{b}$, m et n

comme ci-dessus, on peut écrire de suite :

$$\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} = \frac{m+n}{m-n} \qquad \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{mn}{m+n}$$

et le tableau 17 donne :

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\frac{a}{c}+1}{\frac{a}{c}-1} = M \qquad \frac{\delta}{\beta} = \frac{\frac{d}{b}+1}{\frac{d}{b}-1} = N$$

il en résulte : $\frac{m}{n} = \frac{MN + 1}{MN - 1}$

cette équation donne lieu aux mêmes remarques que dans IV et l'on trouvera pour lieux de A (signe supérieur) et C (signe inférieur)

$$\frac{x^2}{\left(\frac{N \pm 1}{N}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{M \pm 1}{M}\right)^2} = \frac{m^2}{4},$$

et, pour les lieux de B (signe supérieur) et D (signe inférieur)

$$\frac{x^2}{\left(\frac{N \pm 1}{N}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{M \pm 1}{M}\right)^2} = \frac{n^2}{4}.$$

Le lieu de I a pour équation

$$\frac{x^2}{\left(\frac{N^2 - 1}{N}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{M^2 - 1}{M}\right)^2} = \frac{m^2}{4(MN + 1)^2}.$$

Le lieu du centre de gravité a une équation de même forme.

3° Lieux déterminés.

On donne trois équations distinctes entre α, β, γ, δ et des paramètres indépendants, et l'on y joint les expressions des coordonnées x et y d'un sommet du quadrilatère, ou de tout autre point déterminé de cette figure, fonctions elles-mêmes de α, β, γ, δ et de constantes données. On se trouvera ainsi dans le même cas que dans 2° après la découverte de l'équation de condition. Il est bon d'observer que ce dernier genre de relations mérite spécialement le titre de ce mémoire.

— Nous faisons suivre ces quelques applications, rapidement résolues, de l'énoncé d'autres cas variés qu'on traitera aisément par des équations du second degré ou bi-carrées.

Quand le lieu s'est trouvé trop compliqué, on a supprimé la mention : lieu, à la suite de celle : équation de condition.

La surface S sera distinguée de l'angle $\hat{S}$.

Les angles désignés par A'B'C'D' sont ceux d'où l'on voit respectivement les côtés a, b, c, d des deux sommets opposés, et qui sont déterminés par :

$$\operatorname{tg} A' = \frac{\beta(\gamma + \alpha)}{\alpha\gamma - \beta^2}, \quad \operatorname{tg} B' = \frac{\alpha(\delta - \beta)}{\beta\delta + \alpha^2}, \quad \operatorname{tg} C' = \frac{\beta(\gamma - \alpha)}{\alpha\gamma + \beta^2}, \quad \operatorname{tg} D' = \frac{\alpha(\delta + \beta)}{\beta\delta - \alpha^2}.$$

1° Poblèmes déterminés

données

A, D, m et un côté
A, D, m, f
A, D, m, S
A, m, n et un côté
A, m, n, f
A, m, n, S
m, n, S, R
m, n, S, f
A, D, f et un côté
A, D, m et un côté
A, D, R et un côté

2° Problèmes pseudo-déterminés

A, D, m, n (Equation de condition-lieu)
A, D, m, R —
A, m, n, R —
m, n, μ, f (Equation de condition)
A, n, R, f —
b, d, B', D' —

3° Lieux géométriques

A', m, C'
m, n, $\hat{I}$
α, β et $\gamma = \delta$ ou $\gamma \times \delta$ ou A, B, C, D, ou A', B', C', D'.
α, γ et $\delta = \beta$ ou $\delta \times \beta$ —

A, D, S, b — α, δ et $\beta = \gamma$ ou $\beta \times \gamma$ ou A, B, C, D ou A′, B′, C′, D′.
A, D, f, S — β, γ et $\alpha = \delta$ ou $\alpha \times \delta$ —
A, D, R, f — β, δ et $\alpha = \gamma$ ou $\alpha \times \gamma$ —
A, m, R, f — γ, δ et $\alpha = \beta$ ou $\alpha \times \beta$.

(Lieux) Autres *conditions*. On donne :

δ, γ et θ

$\alpha = \beta$, $\beta = \gamma$ et SQ passant par un point fixe

θ, μ et E_1G_1 parallèle à SQ

E_1G_1 passant par un point fixe; G_1Q_1 et E_1S parallèles à des droites données.

Autres questions.

— δ et γ étant constants ; α, β variables ; si le lieu du point J_1 est représenté par $\alpha\beta =$ constante ou $\frac{\delta - \beta}{\gamma - \alpha} =$ constante, les tangentes en J, et en C aux points correspondants sont parallèles.

— Déduire de l'expression $S = 2f \times LP'$ (en supposant que Q s'écarte à l'infini de A, sur la droite AD par exemple) que l'aire d'un trapèze isoscèle est quadruple de celle du triangle ayant pour sommets les milieux des diagonales et le point de rencontre des côtés non parallèles.

— A déduire du n° 8. Si l'on considère deux hyperboles ayant un foyer commun P; pour directrices deux droites quelconques AC et BD qui se coupent en I (*fig.* 5) et même paramètre (rapport des distances au foyer et à la directrice); les intersections de chacune des directrices par l'autre hyperbole seront quatre points situés sur une même circonférence. Le paramètre a pour expression $\frac{R}{f}$.

Ces propriétés subsistent, sous les mêmes conditions, pour deux ellipses ou deux paraboles, et les cordes communes aux deux courbes sont situées sur l'une ou l'autre des bissectrices des angles formés par les directrices.

— Si l'on prolonge les deux côtés d'un angle du quadrilatère, A, par exemple, d'une longueur égale au côté opposé, la diagonale, issue de A, du parallélogramme construit sur les lignes $a + c$ et $d + b$ ainsi formées, passe par le point L. De là un moyen facile pour obtenir ce point.

H. Lecocq
ancien professeur de l'Université (Avignon).

CONDITIONS DE DIVISIBILITÉ
D'UN POLYNÔME ENTIER $f(x)$ PAR $(x - a)^2$ ET $(x - a)^3$
MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE

Par M. **Barbarin**, professeur au lycée de Bordeaux

I. — *Divisibilité par* $(x - a)^2$.

Soient

$$f(x) \equiv A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots\dots + A_{m-1}x + A_m$$
$$f_1(x) \equiv B_0x^{m-1} + B_1x^{m-2} + \dots\dots + B_{m-1}$$

le polynôme proposé et le quotient de sa division par $x - a$; on a identi-

quement, pour toute valeur de x

$$f(x) \equiv (x-a)f_1(x) + f(a).$$

Pour que $f(x)$ soit divisible par $(x-a)^2$, il faut et il suffit que $f(x)$ et $f_1(x)$ soient séparément divisibles par $x - a$, ou que l'on ait à la fois

(1) $$f(a) = 0 \quad f_1(a) = 0.$$

D'après la règle de la division des polynômes, on a

$$f_1(x) \equiv A_0x^{m-1} + \begin{array}{l} A_0a \\ + A_1 \end{array} \Bigg| x^{m-2} + \begin{array}{l} A_0a^2 \\ + A_1a \\ + A_2 \end{array} \Bigg| x^{m-3} + \ldots \quad + \begin{array}{l} A_0a^{m-1} \\ + A_1a^{m-2} \\ + A_{m-1} \end{array}$$

donc, en ajoutant les résultats numériques *ligne par ligne*,

$$f_1(a) = mA_0^{m-1}a + (m-1)A_1^{m-2}a + (m-2)A_2a^{m-3} + \ldots + 2A_{m-2}a + A^{m-1}.$$

Envisageons le nouveau polynôme

$$f'(x) \equiv mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + (m-2)A_2x^{m-3} + \ldots + 2A_{m-2}x + A_{m-1}$$

chacun de ses termes peut se déduire du terme du même rang dans $f(x)$ par le procédé mécanique que voici : *Multiplier le coefficient du terme considéré de* f(x) *par l'exposant de* x *que ce terme contient, puis retrancher* I *à l'exposant de* x. Appelons ce calcul une *dérivation*, et disons que $f'(x)$ est le *dérivé* de $f(x)$. L'identité des conditions

$$f_1(a) = 0 \quad f'(a) = 0$$

prouve que $f_1(x)$ et $f'(x)$ sont *en même temps* divisibles par $x - a$; donc le système de conditions (1) équivaut au suivant

(2) $$f(a) = 0 \quad f'(a) = 0.$$

Pour qu'un polynôme f(x) *soit divisible par* $(x-a)^2$, *il faut donc et il suffit que ce polynôme et son dérivé s'annulent ensemble pour* $x = a$.

II. — *Divisibilité par* $(x-a)^3$.

Pour que $f(x)$ soit divisible par $(x-a)^3$ il faut et il suffit que $f(x)$ soit divisible par $x - a$, et $f_1(x)$ par $(x-a)^2$; de là, en appelant $f_1'(x)$ le polynôme dérivé de $f_1'(x)$ par la règle citée plus haut, le système de conditions

$$f(a) = 0, \quad f_1(a) = 0, \quad f_1'(a) = 0,$$

ou, ce qui est identique,

(3) $$f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \quad f_1'(a) = 0,$$

or

$$f_1'(x) \equiv (m-1)A_0x^{m-2} + \begin{array}{l} A_0a \\ + A_1 \end{array} \Bigg| (m-2)x^{m-3} + \begin{array}{l} A_0a^2 \\ + A_1a \\ + A_2 \end{array} \Bigg| (m-3)x^{m-4} + \ldots \begin{array}{l} + A_0a^{m-2} \\ + A_1a^{m-3} \\ + A_2a^{m-4} \\ + A^{m-2} \end{array}$$

en ajoutant les résultats numériques *ligne par ligne*, on a encore

$$f_1'(a) = \frac{m(m-1)}{2} A_0a^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} A_1a^{m-3}$$
$$+ \frac{(m-2)(m-3)}{2} A_2a^{m-4} + \ldots + A_{m-2}$$

car les coefficients numériques qui accompagnent $A_0A_1\ldots$ sont des sommes d'entiers consécutifs. (*A suivre*).

Barbarin,
professeur au Lycée de Bordeaux.

Le Directeur-gérant,
GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE St-CYR

201. Mathématiques. — 1) Dans un triangle ABC la base AB est fixe. On demande le lieu de C tel que

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \operatorname{cotg} A.$$

2) On donne un demi-cercle de diamètre AB = 2R. On propose de trouver sur ce demi cercle un point M tel que, le projetant sur AB ou P on ait AP + PM = l, l étant une quantité donnée.

Charles Cochez.

202. Epure. — On donne un triangle ABC dans un plan de côte 12 AC = $0^m,10$, AB = 0,08, BC = 0,012. Ce triangle est la base d'un tétraèdre dont on connaît l'arête AS = $0^m,11$, l'arête SB = $0^m,13$, et la pente $\frac{2}{5}$ du plan de la face SBC. Un cylindre horizontal dont l'axe passe par S a ses génératrices parallèles au côté AC. On demande le solide restant du tétraèdre entaillé par le cylindre.

Léopold Massip.

203. Calcul trigonométrique. — Calculer les angles x compris entre 0 et 18° donnés par la formule

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{a \sin \beta - b \sin \alpha}{a \sin \beta + b \sin \alpha}$$

dans laquelle on fait

$$a = 4627^m,55, \qquad b = 3944,^m68.$$
$$\alpha = 51^\circ\ 57'\ 44'',$$
$$\beta = 63^\circ\ 18'\ 27''.$$

204. Questions d'oral. — 1) On donne un triangle ABC. Sur le prolongement de BC on donne un point M. Déterminer sur AC un point M tel qu'en menant par ce point la parallèle DE à BC on ait DE = DM.

Lire à la quatrième page de la couverture les conditions relatives à la correction et à l'abonnement des copies.

2) Construire un triangle rectangle connaissant la bissectrice de l'angle aigu B et la longueur MC, M étant le pied de la bissectrice sur le côté AC (A ou sommet de l'angle droit).

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

205. Mathématiques. — 1) Un cône de hauteur h est inscrit dans une sphère de rayon R, à quelle distance x du sommet du cône faut-il mener un plan parallèle au plan de sa base pour que l'aire de la section faite dans le cône soit le $\frac{1}{3}$ de l'aire de la section faite dans la sphère par le même plan.

2) Si dans un triangle $\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$ le triangle est rectangle ou isocèle.

206. — Calculer par logarithme

$$x = \frac{(a+b)^m + (a-b)^n}{123\ldots\ldots p}$$

quand $a = 2221,43,\quad b = 6635,48,$

$m = 15,\quad n = 11,\quad p = 7.$

207. Physique. — Un prisme BAC dont l'angle réfringent A est connu, est rencontré perpendiculairement à l'une de ses faces par un rayon lumineux RI qui se réfracte en H suivant HS. On mesure la déviation δ que le rayon subit par cette réfraction. Déduire de la connaissance des angles A et δ la valeur de l'indice de réfraction de la substance du prisme.

207bis. Chimie. — Phosphore et ses questions allotropiques.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES MATHÉMATIQUES

208. Mathématiques. — Une pyramide SABCDE a pour base un pentagone régulier dont le côté est a, les autres arêtes de la pyramide sont aussi égales à a. On demande de calculer : 1° le volume de la pyramide, 2° le rayon de la sphère circonscrite, 3° les lignes trigonométriques de l'angle plan du dièdre SA.

(*Au choix*). *a*) Volume du tronc de pyramide à bases parallèles.

b) Tangente à une ellipse par un point extérieur.

c) Démontrer les théorèmes qui conduisent au volume de la sphère.

209. Physique. — Un baromètre est enfermé dans un large tube de verre scellé à la lampe. A l'instant de la fermeture, la hauteur de la colonne est de 76 centimètres et la température de 15°. Calculer la hauteur de la colonne quand la température est de 40°. On ne tiendra pas compte de la dilatation du verre.

(*Au choix*). *a*) Brouillards, nuages, rosée, pluie, neige.

b) Photométrie.

c) Electricité athmosphérique.

IV. — BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT MODERNE

210. Mathématiques. — Une sphère est posée sur un plan horizontal. Sur le même plan repose par sa base, un cône droit dont la hauteur est égale au diamètre de la sphère. On demande de couper ces deux corps par un plan horizontal de telle sorte que les sections soient entre elles comme deux nombres donnés.

(*Au choix*). *a*) Résolution directe de l'équation du second degré.

b) Etablir la somme, le produit, la différence des racines d'une équation du second degré.

c) Résolution de l'équation bicarrée.

211. Physique. — Un tuyau fermé de $0^m,60$ de longueur donne l'harmonique 3. Quel est le rang de cet harmonique dans l'échelle musicale ?

(*Au choix*). *a*) Marche des rayons lumineux dans un miroir concave.

b) Marche des rayons lumineux dans la lampe et grossissement.

c) Expériences de Newton sur la décomposition de la lumière.

V. BACCALAURÉAT (LETTRES. — SCIENCES)

212. Mathématiques. — Etudier les variations de la fonction

$$Y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3}.$$

(*Au choix*). *a*) Explication des différentes méthodes de nivellement.

b) Ombre d'une sphère.

c) Ombre d'un cône.

213. Physique. — On donne 50 éléments de Daniell dont la force électro-motrice est de 1 volt et la résistance de 1 ohm montés en série. On demande combien on pourra alimenter de lampes à incandescence montées en dérivation, ces lampes étant de 50 volts, ayant une résistance à chaud de 50 ohms et exigeant pour leur fonctionnement un courant de $\frac{1}{2}$ ampère.

(*Au choix*). *a*) Enoncé des lois fondamentales des courants.

b) Bobine de Ruhmkorff.

c) Galvanoplastie. — Dorure. — Argenture.

VI. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

214. — Pour creuser un puits les ouvriers demandent 1 centime pour le premier mètre, 2 centimes pour le deuxième. L'eau étant trouvée à 17 mètres de profondeur. Combien coûte le forage du puits.

215. — Calculer la surface d'un triangle équilatéral de 6 mètres de côte.

216. — Calculer $x = \dfrac{\sqrt[6]{7777} \times \sqrt[2]{6666} + \sqrt{7890}}{3775 + \sqrt[3]{9684}}$.

217. — Quelle serait la valeur au change d'un objet d'or du poids de 428 gammes et au titre 0,920. Le kilogramme d'or pur vaut au change 3437 francs. La valeur du cuivre faisant partie de l'alliage sera considérée comme nulle.

218. Algèbre. — Quelle valeur faut-il attribuer à p et à Q pour que $x^4 + 1$ soit divisible par $x^2 + px + q$.

218bis. — Même calcul qu'au n° **216.**

DEUXIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

Manuel d'analyse chimique appliquée à l'examen des produits industriels et commerciaux, par EMILE FLEURENT, docteur ès-sciences, professeur remplaçant du cours de chimie industrielle au conservatoire national des Arts et métiers. — Georges Carré et C. Naud, éditeurs, 3, rue Racine, Paris. — 1 volume in-8° carré de 582 pages avec 101 figures. — Prix : **12 fr.**

En écrivant ce livre, l'auteur a cherché à : 1° Exposer, en les soulageant de tous les détails théoriques et pratiques qui ne sont pas rigoureusement utiles, les méthodes générales d'analyse minérale qualitative et quantitative et l'analyse organique élémentaire ;

2° Eviter des recherches trop longues à ceux qui sont pressés par le temps ou qui n'ont pas pour cela des connaissances suffisantes, en ne donnant, pour l'examen de chaque produit soumis au contrôle chimique, qu'une seule méthode, au plus deux, devant conduire rapidement et sûrement au résultat qu'on envisage ;

3° Réunir dans un même cadre, ainsi qu'on pourra s'en rendre compte en jetant un coup d'œil rapide sur la table des matières, l'étude des produits *les plus importants* en même temps que *les plus divers* qui peuvent se rencontrer dans le laboratoire du chimiste industriel : Produits métalloïdiques et métalliques, engrais minéraux et organiques, produits végétaux et animaux, boissons fermentées, etc., etc.

On trouvera souvent intercalés à la fin de chaque chapitre des tableaux donnant les résultats d'application des méthodes développées dans le texte et empruntés aux tableaux originaux des auteurs.

SOLUTION DE LA QUESTION 161

Par M. **Vazou**

PROBLÈME. — *Une suite de sphères* C, C′, C″.... *en nombre illimité et tangentes extérieurement sont inscrites dans un même cône de révolution dont l'ouverture est* 2ω. *La distance* a *du sommet* S *du cône au centre* C *de la sphère la plus éloignée est connue. On demande :* 1° *d'exprimer au moyen de* a *et de* ω, *la distance* x *du sommet du cône au centre de gravité de l'ensemble des sphères. On devra trouver en particulier que, pour* $\omega = 30^\circ$, $x = \frac{39}{40}a$; 2° *ce que devient* x *pour* $\omega = 0$ *et pour* $\omega = 90^\circ$; 3° *de montrer que quand* ω *varie de* 0° *à* 90°, x *va toujours en augmentant.*

Désignons par r le rayon de la sphère C et par r_1, r_2... r_n les rayons des sphères successives supposées au nombre de n. Soient a, x_1, x_2... x_n, les distances des centres de ces sphères au sommet du cône, toutes ces sphères

étant inscrites dans le cône on a

$$(1)\qquad \begin{cases} r \;\,= a \sin \omega \\ r_1 = x_1 \sin \omega \\ r_2 = x_2 \sin \omega \\ \dots\dots \\ r_n = x_n \sin \omega \end{cases}$$

Les sphères étant tangentes entre elles successivement on a

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 + r_1 + r = a \\ x_2 + r_2 + r_1 = x_1 \\ x_3 + r_3 + r_2 = x_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_n + r_n + r_{n-1} = x_{n-1}. \end{cases}$$

Désignons par x la distance du sommet du cône au centre de gravité de l'ensemble des sphères, en appliquant le théorème des moments par rapport au sommet du cône on a

(3) $(r^3 + r_1^3 + r_2^3 \dots + r_n^3)x = ar^3 + x_1 r_1^3 + x_2 r_2^3 + \dots + x_n r_n^3$

en remplaçant dans (3) les r par leurs valeurs données par (1) il vient

$$\sin^3\omega(a^3 + x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3) = (a^4 + x_1^4 + \dots + x_n^4)\sin^3\omega.$$

$$(4)\qquad x = \frac{a^4 + x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4}{a^3 + x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{n3}}.$$

Or, en tenant compte des relations (1), les égalités (2) peuvent s'écrire

$$x_1(1 + \sin \omega) = a\,(1 - \sin \omega)$$
$$x_2(1 + \sin \omega) = x_1(1 - \sin \omega)$$
$$x_3(1 + \sin \omega) = x_2(1 - \sin \omega)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n(1 + \sin \omega) = x_{n-1}(1 - \sin \omega),$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{x_1}{a} = \dfrac{1 - \sin \omega}{1 + \sin \omega} = u \quad \text{en posant} \quad \dfrac{1 - \sin \omega}{1 + \sin \omega} = u \\ \dfrac{x_2}{x_1} = u \\ \dfrac{x_3}{x_2} = u \\ \dfrac{x_n}{x_{m-1}} = u \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$x_1 = au, \quad x_2 = au^2, \quad \dots\dots \quad x_n = au^n.$$

Mais u est une quantité plus petite que 1 car ω est toujours plus petit que 90°, le numérateur et le dénominateur de l'expression précédente contiennent donc des progressions géométriques décroissantes de raisons u^4 et u^3, si donc on suppose que n augmente indéfiniment on a

$$x = \frac{\dfrac{1 - u^4}{a}}{\dfrac{1}{1 - n^3}} = \frac{a(1 - u^3)}{1 - u^4} = \frac{a(u^3 - 1)}{u^4 - 1}$$

$$(6)\qquad x = \frac{a(u - 1)(u^2 + u + 1)}{(u - 1)(u + 1)(u^2 + 1)} = \frac{a(u_2 + u + 1)}{(u + 1)(u^2 + 1)}.$$

Pour $\omega = 30°$, comme $\sin \omega = \frac{1}{2}$, on a

$$u = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

par suite

$$(7) \qquad x = \frac{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\ 1}{\left(\frac{1}{3} + 1\right)\left(\frac{1}{9} + 1\right)} \cdot a + \frac{\frac{13}{9}}{\frac{4}{3} \times \frac{10}{9}} \cdot a = \frac{39}{40} \cdot a$$

Pour $\omega = 0$, on a $u = 1$, il faut alors nous reporter à l'expression générale de la valeur de x

$$x = \frac{a(1 + u^4 + u^8 + \dots + u^{4n})}{1 + u^3 + \dots + u^{3n}} = \frac{a \times (n + 1)}{n + 1} = a.$$

Pour $\omega = 90°$, $u = 0$ on retrouve encore $x = a$.

Mais si au lieu de supposer brusquement $\omega = 0$, on suppose que l'on fasse tendre ω vers 0, alors u reste encore plus petit que 1, quoique tendant vers 1 à la limite et l'on peut alors chercher la limite de la valeur de x en cherchant la limite de la valeur (6), on a alors

$$\text{lem } x \frac{36}{4}.$$

De même si l'on suppose que ω tende vers 90° sans jamais l'atteindre, u tend vers 0, la formule (6) donnerait comme limite de x, lem $x = a$.

Mais afin de voir nettement comment varie x quand ω varie de $+ \varepsilon$ à $90 - n$, nous allons faire un changement de variable.

Posons $\omega = 90 - \alpha$, alors on a

$$u = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

quand a varie de 0 à 90°, α varie de 90° à 0, or $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$ décroît de 1 à 0 quand α varie de 90° à 0 ou quand ω varie de 0° à 90°, si l'on pose $u = \frac{1}{z}$, z variera de 1 à l'∞.

En faisant ce changement l'expression (6) devient

$$x = \frac{az(z^2 + z + 1)}{(z + 1)(z^2 + 1)} = \frac{a(z^3 + z^2 + z)}{z^3 + z^2 + z + 1} = a\left(1 - \frac{1}{z^3 + z^2 + z + 1}\right)$$

Sous cette forme, on voit que x augmente quand z varie de 1 à l'infini et pour $z = \infty$, on retrouve bien $x = a$. **M. Vazou.**

SOLUTION DE LA QUESTION 175

Par M. **Vazou**

Projection. — *Un piéton part à 8 heures du matin, il fait 1 kilomètre en 9 minutes et il se repose 3 minutes après chaque kilomètre A quelle heure sera-t-il rejoint par un courrier qui part dans le même sens à midi, fait 9 kilomètres par heure et se repose 20 minutes chaque fois qu'il a parcouru 20 kilomètres.*

Nous allons chercher le nombre de kilomètres parcourus au moment de la première rencontre, c'est-à-dire lorsque le courrier et le piéton se trouvent ensemble pour la première fois.

La première rencontre peut se faire dans l'une des trois hypothèses suivantes :

1° *A la fin d'un repos du piéton;*

2° *Lorsque le piéton est en marche*;

3° *Pendant l'intervalle d'un repos*;

1° *Supposons d'abord que la rencontre ait lieu à la fin d'un repos du piéton*, le nombre de kilomètres parcourus est alors un nombre entier que nous désignerons par x et que l'on peut écrire

$$x = 20y + z \qquad y \text{ entier} > 0$$
$$z \quad - \quad > 0 \text{ et } < 20$$

on peut remarquer en effet que lorsque le courrier se met en marche le piéton a parcouru 20 kilomètres.

En tenant compte des repos, le piéton fait 1 kilomètre en 12 minutes et comme la rencontre se fait à la fin d'un repos, le temps écoulé depuis le départ du piéton est $= \text{à } (20y + z) \times 12$.

D'autre part, puisque le courrier fait 9 kilomètres en 60 minutes, pour parcourir 1 kilomètre, il met $\frac{60^m}{9}$ et pour parcourir 20 kilomètres en tenant compte du repos il met

$$\frac{60 \times 20}{9} + 20 = \frac{20 \times 69}{9} = \frac{20 \times 23}{3},$$

et pour parcourir $20y + z$ il mettra

$$\frac{20 \times 23}{3} y + \frac{60}{9} z = \frac{460y}{3} + \frac{20z}{3} = \frac{20(23y + z)}{3}$$

comme il est parti 4 heures = 240 minutes en retard, on aura donc l'équation

$$(20y + z) \times 12 = 240 + \frac{20 \times (23y + z)}{3}$$
$$36(20y + z) = 720 + 20\,(23y + z)$$
$$20 \times 13y + 16z = 720$$
$$65y + 4z = 180$$

d'où
$$z = \frac{180 - 65y}{4} = 45 - 16y - \frac{y}{4}$$

z devant être entier, il faut nécessairement qu'on ait $\frac{y}{4} = u$,

d'où
$$z = 4u, \quad y = 45 - 65u.$$

Or, il n'y a aucune valeur de u entière, positive ou négative, qui donne pour y et z des valeurs positives et pour z une valeur inférieure à 20. *La première rencontre ne peut donc avoir lieu à la fin d'un repos.*

2° *La première rencontre a lieu lorsque le piéton est en marche* (ceci comprend le cas particulier où la rencontre aurait lieu au commencement d'un repos).

La distance parcourue par le piéton peut être représentée par

$$x = 20y + z + v \qquad y \text{ entier} > 0$$
$$z \quad - \quad > 0 \text{ et } < 20$$
$$v \text{ fraction de kilomètre} \leqslant 1$$

Ne fais-je pas ici une pétition de principe en supposant v commensurable? (Je démontre plus loin que v est commensurable).

Le temps mis par le piéton à parcourir x est donc égal à

$$(20y + z) \times 12 + 9v$$

le temps mis par le courrier est égal à

$$\frac{20 \times 23y}{3} + \frac{60}{9}\frac{(z + v)}{3} = 20(23y + z + v)$$

nous aurons l'équation

$$(20y + z) \times 12 + 9v = 240 + \frac{20(23y + z + v)}{3}$$

$$36(20y + z) + 27v = 720 + 20(23y + z + v)$$

$$20 \times 13y + 16z + 7v = 720.$$

Cette équation exige que $7v$ soit entier, donc v est commensurable.

Posons $7v = \gamma$, nous aurons

$$65y + 4z = 180 - \frac{\gamma}{4} = 180 - \delta.$$

$\frac{\gamma}{4}$ ne peut prendre que les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 puisque $v \leqslant 1$ par suite $\delta = \frac{\gamma}{4}$ qui doit être entier ne peut prendre que la valeur 1 correspond à $\gamma = 4$ et $v = \frac{4}{7}$. L'équation devient

$$65y + 4z = 179$$

$$z = \frac{179 - 65y}{4} = 45 - 16y - \frac{y+1}{4},$$

z devant être entier, il faut nécessairement que $\frac{y+1}{4} = u$,

par suite
$$y = 4u - 1$$
$$z = 61 - 65u.$$

Or, il n'existe aucune valeur entière de u, positive ou négative qui donne pour y et z des valeurs entières positives et pour z une valeur inférieure à 20. *La première rencontre ne peut donc avoir lieu lorsque le piéton est en marche.*

3° *La rencontre a lieu dans un intervalle de repos du piéton.*

Le piéton a alors parcouru un nombre entier de kilomètres

$$x = 20y + z - 1 + 1$$

l'intervalle de temps écoulé depuis le départ du piéton est égal à

$$20y + z - 1)12 + 9 + \theta \qquad \theta < 3 \text{ minutes}$$

Temps mis par le courrier $= \frac{20(23y + z)}{3}$

on aura l'équation

$$(20y + z - 1) \times 12 + 9 + \theta = \frac{20(23y + z)}{3} + 240$$

$$36(20y + z - 1) + 27 + 3\theta = 20(23y + z + 720$$

$$20 \times 13y + 16z - 9 + 3\theta = 720,$$

de cette équation on déduit que 3θ doit être entier, donc θ est commensurable.

Posons $3\theta = \gamma \qquad \gamma < 9$

$$4(65y + 4z) = 729 - \gamma$$

$$65y + 4z = 182 + \frac{1 - \gamma}{4}$$

$$\frac{1 - \gamma}{4} = \delta \text{ doit être entier } \gamma = 1 - 4\delta.$$

γ doit être entier, > 0 et < 9, il n'y a que les valeurs $\delta = 0$ et $\delta = -1$ qui donnent par γ des valeurs convenables

$$\delta = 0, \qquad \gamma = 1, \quad \theta = \frac{1}{3}.$$

$$\delta = -1, \quad \gamma = 5, \quad \theta = \frac{5}{3},$$

Pour $\gamma = 1$, on a $\qquad 65y + 4z = 182$

$$z = \frac{182 - 65y}{4} = 45 - 16y + \frac{2 - y}{4}.$$

Posons $\qquad \dfrac{2 - y}{4} = u,$

d'où $\qquad y = 2 - 4u = 2(1 - 2u)$

$$z = 45 - 32(1 - 2u) + u = 13 + 65u.$$

Il n'y a que la valeur $u = 0$ qui convienne et qui donne

$$y = 2, \quad z = 13$$

par suite $\qquad x = 40 + 13 =$ **53** **kilomètres.**

Pour $\gamma = 5$ on a

$$65y + 4z = 181$$

$$z = \frac{181 - 65y}{4} = 45 - 16y + \frac{1 - y}{4}.$$

Posons $\qquad \dfrac{1 - y}{4} = u$

d'où $\qquad y = 1 - 4\omega, \quad z = 29 + 65u.$

Aucune valeur de u ne donne pour y et z des valeurs convenables.

Ainsi donc la première rencontre a lieu lorsque le courrier a parcouru 53 kilomètres, par conséquent le piéton a parcouru à partir de midi 33 kilomètres.

Temps mis par le courrier pour atteindre le piéton

$$\frac{20 \times (46 + 13)}{3} = \frac{20 \times 59}{3} = \frac{1180}{3} = 393^m + \frac{1}{3} = 6^h,33^m \frac{1^m}{3} = 6^h,33^m,20^s.$$

Telle est l'heure de la première rencontre.

Le courrier continue son chemin et a encore 7 kilomètres à faire avant de s'arrêter. Pour parcourir ces 7 kilomètres il mettra un temps égal à

$$\frac{7}{9} \text{ d'heure} = \frac{7 \times 60^m}{3} = \frac{7 \times 20}{3} = \frac{140}{9} = 46^m + \frac{2^m}{3} = 46^m,40^s;$$

il se repose 20 minutes, par conséquent se remet en marche $66^m,40^s = 1^h,6^m,40^s$ après avoir rencontré pour la première fois le piéton.

Cherchons l'espace parcouru par le piéton pendant cet intervalle de temps. Tout d'abord le piéton ne s'est pas remis en route au moment même où il était atteint par le courrier. Comme $\theta = \frac{1^m}{3}$, il est reparti $2^m\,\frac{2}{3}$ après la rencontre, par conséquent il faut déterminer l'espace parcouru par le piéton

pendant un temps égal à

$$66^m + \frac{2}{3} - \left(2 + \frac{2}{3}\right) = 64 \text{ mètres},$$

il a donc parcouru $5^k + \frac{4}{9}$ de kilomètre, la distance qui le sépare du courrier au moment du départ de celui-ci est donc égale à

$$7^k - \left(5 + \frac{4}{5}\right) = 2 - \frac{4}{9} = \frac{14}{9} = 1^k + \frac{5}{9}.$$

Lorsque le courrier a parcouru 20 kilomètres et qu'il va partir de nouveau le temps écoulé est égal à

$$\frac{60 \times 20}{9} + 20 = \frac{400}{3} + 20^m = 133 + \frac{1}{2} + 20 = 153^m + \frac{1}{3}.$$

Cherchons l'espace parcouru par le piéton pendant ce temps. Tout d'abord il achève de parcourir sa fraction $\frac{5}{9}$ de kilomètre en 5 minutes, puis il se repose 3 minutes, par suite il nous reste à déterminer l'espace parcouru en $153 + \frac{1}{3} - 8^m = 145^m + \frac{1}{3} = 2^h\, 24^m + 1^m + \frac{1}{3}$.

Cet espace est égal à $10^k + 2^k + \left(\frac{1}{9} \times \frac{4}{3}\right) = 12^k + \frac{4}{27}$.

il a donc parcouru en tout $12^k + \frac{4}{27} + \frac{5}{9} = 12^k + \frac{19}{27}$,

la distance qui sépare le piéton du courrier au moment du départ de celui-ci est donc égale à $20 - \left(12 + \frac{19}{27}\right) = 8 - \frac{19}{27} = 7 + \frac{8}{27}$,

la distance qui le sépare du courrier au moment où celui-ci va repartir a donc augmenté de $7 + \frac{8}{27} - \left(1 + \frac{5}{9}\right) = 6 - \frac{7}{27} = 5^k + \frac{20}{27}$.

Cette augmentation de distance se reproduit à chaque nouveau départ du courrier, *par conséquent le piéton ne rejoindra jamais le courrier.*

M. Vazou.

TROISIÈME PARTIE

CONDITIONS DE DIVISIBILITÉ

D'UN POLYNÔME ENTIER $f(x)$ PAR $(x - a)^2$ ET $(x - a)^3$

MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE

Par M. **Barbarin**, professeur au lycée de Bordeaux

(*Suite*, voir n° de Mars, p. 103)

Envisageons cette fois le polynôme

$$f''(x) \equiv m(m-1)A_0x^{m-2} + (m-1)(m-2)A_1x^{m-3} + \dots + 2A_{m-2}$$

la règle de dérivation le tire de $f'(x)$: c'est donc le *dérivé du dérivé* de $f(x)$ ou *le deuxième dérivé* de $f(x)$. Par suite

$$f_1'(a) = 0 \quad f''(a) = 0,$$

sont des conditions identiques exprimant que $f_1'(x)$ et $f''(x)$ sont ensemble

divisibles par $x - a$, et le système (3) équivaut au suivant

(4) $$f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \quad f''(a) = 0.$$

Pour qu'un polynôme f(x) *soit divisible par* $(x - a)^3$, *il faut donc et il suffit que ce polynôme, son premier dérivé* f'(x), *et son second dérivé* f''(x) *s'annulent ensemble pour* x = a.

Exemple. — Prouver que :

$f(x) \equiv x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$ est divisible par $(x-1)^3$ (*Catalan*)

$$f'(x) \equiv (2n+1)x^{2n} - (2n+1)(n+1)x^n + (2n+1)nx^{n-1}$$
$$\equiv (2n+1)x^{n-1}\left[x^{n+1} - (n+1)x + n\right]$$
$$f''(x) \equiv (2n+1)2nx^{2n-1} - (2n+1)(n+1)nx^{n-1} + (2n+1)n(n-1)x^{n-2}$$
$$\equiv (2n+1)nx^{n-2}\left[2x^{n+1} - (n+1)x + n - 1\right]$$

on voit immédiatement que

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 0, \quad f''(1) = 0$$

la proposition est donc démontrée.

Extrait d'une correspondance

PROPRIÉTÉS DES PUISSANCES CONSÉCUTIVES DES NOMBRES

Voici, Monsieur, quelques observations personnelles que je viens vous soumettre, elles ont trait aux puissances consécutives des nombres.

Il y a déjà cinq ou six ans j'avais composé une table des carrés de 1 à 1000 après avoir fait cette remarque, qui, ainsi que je m'en rendis compte par la suite, n'était pas nouvelle, que le carré de deux nombres consécutifs égale le carré du premier nombre, augmenté de la différence entre le carré de ce nombre et son carré précédent, le tout augmenté de deux.

Plus tard, j'en déduisis qu'il devait y avoir une propriété semblable pour les cubes, je finis par trouver, après d'assez longues recherches, le rapport existant; et enfin, dernièrement, je concluais que toutes les puissances consécutives devaient avoir des propriétés similaires. Or, voici les résultats que j'ai obtenus.

1. *Toutes les puissances des nombres consécutifs sont dans un rapport constant.*

2. *Ce rapport constant se trouve, étant donné une puissance* u, *à la* n^e^ DIFFÉRENCE ENTRE LES PUISSANCES CONSÉCUTIVES, *et il est égal au* PRODUIT DE TOUS LES NOMBRES DEPUIS 1 JUSQU'A u. *Il est toujours invariable pour une même puissance quels que soient les nombres sur lesquels on opère,* pourvu, bien entendu, que ce soit toujours des nombres consécutifs.

3. *On voit donc que ce rapport se complique d'une manière constante au fur et à mesure que l'on opère sur des exposants plus élevés, et pour une puissance quelconque, on pourra prévoir le nombre constant et le rang différentiel où il se trouvera sans avoir besoin de le chercher en faisant toutes les différences.*

4. *Les puissances des nombres consécutifs ont à la* 2e DIFFÉRENCE DES NOMBRES DIVISIBLES PAR TOUS LES NOMBRES PREMIERS DEPUIS I JUSQU'A L'EXPOSANT DE LA PUISSANCE.

5. *Les derniers chiffres qui terminent les puissances d'un même nombre sont les mêmes à* 4 *puissances d'intervalle et ne diffèrent que pour les* 10 *premiers chiffres et les* 4 *premières puissances.*

TABLEAU DES 10 PREMIÈRES PUISSANCES DES NOMBRES DE 1 A 10

1	2	3	4	5
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	248
4	16	64	256	1 024
5	25	125	625	3 125
6	36	216	1 296	7 776
7	49	343	2 401	16 807
8	64	512	4 496	32 768
9	81	729	6 561	59 049
10	100	1 000	10 000	100 000
1	2	6	24	120
E	E	E	E	E

6	7	8	9	10
1	1	1	1	1
64	128	256	512	1 024
729	2 187	6 561	19 683	59 049
4 096	16 384	65 536	262 144	1 048 576
15 625	78 125	390 625	1 953 125	9 765 625
46 650	279 936	1 679 616	10 077 696	60 466 176
117 649	823 543	5 724 801	40 353 607	282 475 249
262 144	2 097 152	16 777 216	134 217 728	1 073 741 824
531 441	4 782 969	43 056 721	387 420 489	3 486 784 401
1 000 000	10 000 000	100 000 000	1 000 000 000	10 000 000 000
720	5 040	40 320	362 880	3 628 800
E	E			

N. B. — J'ai fait suivre d'un E les puissances sur lesquelles j'ai vérifié toutes les propriétés ci-dessus énoncées.

Exemple. — Pour la 5e puissance, je dis que le nombre constant sera

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120,$$

qu'il se trouvera à la 5e différence, de plus que les chiffres qui vont terminer les puissances des nombres seront ceux qui terminent la 1re puissance ($5 - 4 = 1$), c'est-à-dire 1, 2, 3, 4..... 0.

De plus, à partir des 2e différences, nous trouverons des nombres divisibles par $1 \times 2 \times 3 \times 5$, soit, par 30

Premières Puissances	Cinquièmes Puissances	Premières différences	Deuxièmes différences	Troisièmes différences	Quatrièmes différences	Cinquièmes différences
1	1					
2	32	31	180			
3	243	211	570	390	360	
4	1 024	781	1 320	750	480	120
5	3 125	2 101	2 550	1 230	600	120
6	7 776	4 651	4 380	1 830	720	120
7	16 807	9 031	6 930	2 550	840	120
8	32 768	15 960	10 320	3 390	960	120
9	59 049	26 281	14 670	4 350		
10	100 000	40 951				NOMBRE CONSTANT
terminaison des derniers chiffres			divisibilité par 1, 2, 3 et 5			

Voici ce que je voulais faire connaître, vous voyez, Monsieur, que c'est peu de chose en réalité, mais si cela peut être utile à quelqu'un, j'en serai très content.

Henri Tricoire.

QUESTION 709

Solution, par M. Ernest Foucart.

On donne un triangle rectangle AOB; *on projette le sommet* O *sur l'hypoténuse* AB *en* C; *puis*, C *sur* OA, *en* O'. *La parallèle menée par* O', *à* AB, *et la parallèle à* OB, *tracée par le milieu de* OO', *se coupent en un certain point* R; OR *rencontre* AB *en* S.

Démontrer que la perpendiculaire élevée en R *à* OR *et la parallèle à* OA, *menée par* S, *se coupent sur* OB. (G. L.)

Le point R est évidemment le milieu de la parallèle à AB limitée à OA et OB; donc S est milieu de AB. La distance SS_1 de S à OB est alors $\frac{AO}{2}$. Soit $OB = a$ $\widehat{ABO} = \alpha$.

Un calcul immédiat donne

$$SS_1 = \frac{OA}{2} = \frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,a, \qquad SR = \frac{a}{2}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}, \qquad SO = \frac{a}{2\cos\alpha}.$$

Donc SR.SO $= \overline{SS_1}^2$, ce qui montre que la perpendiculaire menée de S_1 à OR passe en R. C.Q.F.D.

Solution exacte de MM. **A. Droz-Farny, Rebeix, L'huillier.**

QUESTION 710

On considère une circonférence Δ, *un diamètre* AB, *et un point* M *sur* Δ. *Soit* H *la projection de* M *sur* AB; *projetons* H *en* K, *sur* AM. *La perpendiculaire élevée à* KH, *en son milieu, rencontre en* T *la tangente en* Δ, *au point* M. *On trace* TK *et, en* K, *on lui élève une perpendiculaire qui coupe* AB *en un certain point* N.

Démontrer que NH *est le quart de* AH. **(G. L.)**

Solution, par M. **A. Droz-Farny**

La perpendiculaire élevée en C sur KH en son point milieu rencontre MB en D, et MH en I. Comme angle TMB = BMH = A le triangle TMI est isoscèle et MT = MI $= \frac{MH}{2}$.

TK rencontre MB et MH respectivement en F et F; les triangles MDT et MKH étant semblables on a : DT $= \frac{KM}{2}$ et, par suite de la similitude des triangles TDE et KEM, DE $= \frac{ME}{2}$. E est donc le centre de gravité du triangle MTI et, par conséquent, MF = FI; donc MF $= \frac{MH}{4}$.

Or, les triangles MKH et HKA sont semblables et comme angle MKF = HKN les droites KF et KN son homologues, donc NH $= \frac{AH}{4}$.

A. Droz-Farny.

Solution exacte **H. L'huillier.**

QUESTION 713

Soit donné un triangle dont les côtés sont a, b, c; *si* m_1, m_2, m_3 *sont les médianes* b_1, b_2, b_3, *les segments non consécutifs déterminés sur les côtés par les bissectrices et* s_1, s_2, s_3 *les symédianes du triangle, on a* :

$$\frac{2m_1b_1}{s_1} \cdot \frac{2m_2b_2}{s_2} \cdot \frac{2m_3b_3}{s_3} = \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(a^2+c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Georges F. d'Avillez.

Solution, par **A. Droz-Farny**

Supposons dans le triangle ABC, la droite AM $= m_1$ prolongée jusqu'en D où elle rencontre la circonférence circonscrite et soit AE $= s_1$; les triangles ABD et AEC sont semblables; donc $c : m_1 + \text{MD} = s_1 : b$. Or,

$m_1+\text{MD}=m_1+\frac{a^2}{4m_1}=\frac{4m_1{}^2+a^2}{4m_1}=\frac{b^2+c^2}{2m_1}$ (et par conséquent : 1) $\frac{2m_1}{s_1}=\frac{b^2+c^2}{bc}$.

On sait en outre que b_1 segment adjacent au côté c sur BC a pour valeur $b_1 = \frac{ac}{b+c}$, de même $b_2 = \frac{ab}{a+b}$ et $c_2 = \frac{bc}{a+c}$.

Il en résulte : $\frac{2m_1b_1}{s_1} \cdot \frac{2m_2b_2}{s_2} \cdot \frac{2m_3b_3}{s_3} = \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

Remarque. — Si b_1, b_2, b_3 représentent les longueurs des bissectrices R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle on trouve :

$$\frac{m_1b_1}{s_1} \cdot \frac{m_2b_2}{s_2} \cdot \frac{m_3b_3}{s_3} = \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \frac{p}{4R}.$$

A. D. F.

Solution de MM. **Angel Bozal Obejen** à Madrid, **L'huillier, Plakhowo.**

SOLUTION DE LA QUESTION 714

Si trois nombres positifs x, y, z, *sont tels que*

$$x + y + z = 1,$$

démontrer que

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x^3 + y^3 + z^3) > 6xyz.$$

L'inégalité (1) peut s'écrire

$$1 - 2xy - 2xy - 2yz - 1 + 3x^2y + 3xy^2 + 3x^2z + 3xz^2 + 3y^2z$$
$$3yz^2 + 6xyz > 6xyz,$$

ou $3xy(x+y) + 3xz(x+z) + 3yz(y+z) - 2xy - 2xz - 2yz > 0$,
ou encore, en considérant que $x + y + z = 1$,

$$3xy(1-z) + 3xz(1-y) + 3yz(1-x) - 2xy - 2xz - 2yz > 0,$$

c'est-à-dire

$$xy + xz + yz - 2xyz > 0,$$

inégalité qui nous donne la relation

(2) $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 2.$$

Cette dernière inégalité est donc équivalente à (1). Si nous remplaçons les numérateurs par leur valeur $(x + y + z)$, il vient :

$$\frac{x+y+z}{x} + \frac{x+y+z}{y} + \frac{x+y+z}{z} > 2,$$

ou $$\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{y+x}{z} > 6,$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{z} > 6,$$

ou $$\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{y}\right) > 6.$$

Or, chacune des expressions entre parenthèses est supérieure ou égale à 2. En effet, supposons $x > y$. Soit $y = x - r$. (*A suivre*).

Le Directeur-gérant,
GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER), IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^T-CYR

219. Mathématiques. — Construire un triangle connaissant l'angle A, la somme $b + c = l$ des côtés AB et AC et la hauteur BH $= \frac{l}{b}$ abaissée de B sur AC.

Vazou.

Résoudre un triangle connaissant l'angle A, la somme $b + c = l$ des côtés AB et AC et la hauteur AH $= h$ abaissée de A sur BC.

Vazou.

Lieu des points tels que leurs polaires par rapport à deux cercles fixes soient rectangulaires. — Discussion. **Massip.**

220. Epure. — Un parallélogramme ABCD situé dans le plan horizontal est défini par les médianes $Am = 0{,}12$, $Bn = 0{,}15$, $CP = 0{,}08$ du triangle ABC, placer A à 0,11 du bord gauche de la feuille et Am suivant la parallèle aux grands côtés de la feuille et au milieu. Un prisme de base ABCD a ses arêtes inclinées à 45° sur le plan H. Sur l'arête issue de A se trouve un point projeté en t tel que $At =$ 20 centimètres. Une sphère de rayon 0,08 est tangente en ce point à l'arête AT.

Intersection du prisme et de la sphère en limitant le prisme au plan tangent horizontal à la partie supérieure de la sphère.

Massip.

221. Calcul trigonométrique. — Résoudre un triangle

$$a = 8457{,}27, \quad b = 5967{,}55, \quad c = 131°47'35''.$$

222. Questions d'oral. — Construire un tétraèdre connaissant la base ABC et les angles ASB, ASC et la hauteur du tétraèdre.

Construire $\sqrt{y} = \sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}$.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

Calculer les rayons des bases d'un tronc de cône de hauteur h, connaissant son volume V égal à celui d'un cône de rayon a et de

hauteur h et sa surface totale égale à la surface d'un cercle de rayon m. **Vazou.**

Calculer les côtés d'un triangle connaissant les rayons r, r' et la bissectrice α. Construction géométrique. **Vazou.**

Calculer les côtés b et c d'un triangle connaissant a, r'', r'''. Construction géométrique. **Vazou.**

224. — Calculer par logarithme x donné par la formule

$$x = \frac{\sqrt[5]{a} \times \pi + 2\pi}{(1+a)\sqrt[5]{2a}} \text{ pour } a = 1845.$$

225. Physique et Chimie. — Un cône droit en fer dont l'axe est vertical et l'angle au sommet 35° flotte sur du mercure dans lequel il s'enfonce de 50 millimètres. Calculer sa hauteur (densité du fer 7,8, du mercure 13,6). On verse ensuite sur le mercure un deuxième liquide, de manière à recouvrir le cône. Il ne s'enfonce plus dans le mercure que de 49 millimètres. Calculer la densité du second liquide.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

226. Mathématiques. — a) Coupez un cône par un plan tel que la section hyperbolique ait une surface maximum.

(*Au choix*) a). Etablir $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$,

b) démontrer les relations $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,

c) établir la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

227. Physique. — Un projectile est lancé de bas en haut avec une vitesse de 300 mètres par seconde. On demande : 1° à quelle hauteur il s'élèvera ; 2° au bout de combien de temps reviendra-t-il à son point de départ $g = 9^m,81$.

(*Au choix*) a). — Vapeurs saturantes et non saturantes.

b) Loi de Mariotte.

c) Fusion et surfusion.

IV. — BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT MODERNE

228. Mathématiques. — Calculer la somme des carrés des racines de l'équation

$$x^2 - (3a + b)x + 2a^2 + 3ab - 2b^2 = 0.$$

(*Au choix*). — *a*) Différentes constructions de la tangente extérieure à deux cercles.

b) Cas de similitude des triangles.

c) Propriété de la bissectrice intérieure et extérieure d'un angle d'un triangle.

229. Physique. — Dans un récipient contenant de l'air sec à la pression 755 millimètres, on fait le vide jusqu'à la pression x, on ouvre le robinet et on fait entrer de l'hydrogène jusqu'à ce que le mélange ait de nouveau la pression 755, on fait de nouveau le vide et on fait arriver l'hydrogène jusqu'à la pression 755 millimètres. Quelle doit être la valeur de x pour que le poids de l'hydrogène soit $^1/_{10}$ du poids de l'air avec lequel il était mélangé.

(*Au choix*). — *a*) Photométrie et principaux photomètres.

b) Expériences de Newton sur la lumière.

c) Phénomènes de chaleur rayonnante.

V. BACCALAURÉAT (LETTRES — SCIENCES)

230. — Etudier par la méthode des dérivées les variations de la fonction

$$y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4x + 3}.$$

(*Au choix*). — *a*) Etablir les formules

$$\operatorname{tg}(a + b) \text{ et } \operatorname{tg}(a - b).$$

b) Calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ connaissant $\operatorname{tg} a$.

c) Résoudre $a \sin x + b \cos x = c$.

231. Physique. — Dans une pompe aspirante la longueur du corps de pompe est de 1 mètre. Sa section 5*dc* et celle du tube d'aspiration $^1/_{12}$ de celle du corps de pompe. Calculer la

longueur que doit avoir le tube d'aspiration pour que le premier coup de piston amène l'eau au bas du corps de pompe.

(*Au choix*). — *a*) Lois du mélange des gaz.

b) Lois de la dissolution.

c) Lois de la fusion, parler de la surfusion.

VI. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

232. — Pour la nourriture du bétail 100 kilogrammes de bon foin équivalent à 250 kilogrammes de pommes de terre crues; 300 kilogrammes de ces dernières à 110 kilogrammes de luzerne; 90 kilogrammes de luzerne à 400 kilogrammes de betteraves; 300 kilogrammes de betteraves à 105 kilogrammes de seigle. Quelle quantité de foin équivaut à 1200 kilogrammes de seigle?

233. — Calculer $x = \dfrac{\sqrt[7]{9998} \times \sqrt[5]{75680} + \sqrt{2530}}{\pi}$.

VII. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

234. — Un homme occupé aux travaux des champs n'a pas besoin de plus de 1^l^,80 par jour de vin contenant 8° degré d'alcool par litre. D'après cela, quelle dépense inutile fait un homme qui consomme deux litres de vin à 12° d'alcool et lui revenant à 48 francs l'hectolitre.

235. — Vérifier l'identité :

$$(a^2 + b^2 + ab)^2 = a^2(a + b)^2 + b^2(a + b)^2 + a^2b^2.$$

235bis. — Calculer $x = \dfrac{\pi^2}{3\sqrt{\pi} + 4\sqrt[5]{2375}}$.

DEUXIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

G. Lazzeri et A. Basseni. *Élementi di Geometria. Livorno Giusti.*
Prix : 5 Lires.

Le plan adopté dans cette géométrie a déjà été inauguré chez nous par quelques auteurs, notamment en géométrie analytique. Il consiste à rap-

procher les parties correspondantes de géométrie plane et de géométrie dans l'espace. Ce plan est contraire aux programmes officiels italiens ; mais il n'est pas toujours nécessaire d'obéir aux programmes et le succès du livre que nous signalons le montre clairement.

Nous regrettons toutefois que la seconde édition de cet ouvrage ne donne pas, comme la première, le volume et la surface du tore, la théorie des centres et des axes. Quoiqu'il en soit, nous le signalons à l'attention de nos collègues qui veulent savoir quelles idées président à l'enseignement des mathématiques hors de nos frontières. **G. M.**

Lieu géométrique des points tels que le rapport de leurs tangentes à deux cercles donnés soit constant. Vérifier que ce lieu est une circonférence ; déterminer la position du centre et la grandeur du rayon.

Soient A et B les centres des deux cercles de rayons R et R', et I le milieu de AB ; cherchons sur la ligne des centres un point H tel que en menant les tangentes HD, HE, on ait :

$$\frac{HD}{HE} = \frac{m}{n},$$

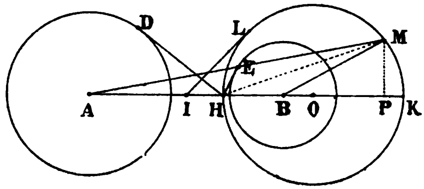
et posons IH $= x$. Le point H sera déterminé par l'équation :

(1) $$\frac{(d+x)^2 - R^2}{(d-x)^2 - R'^2} = \frac{m^2}{n^2},$$

qui, étant du second degré, convient à un second point K.

L'équation devient :

$$x^2 - 2d\left(\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\right)x + d^2 + \frac{n^2R^2 - m^2R'^2}{m^2-n^2} = 0.$$



Soit O le milieu de HK, on a, par la demi-somme des racines :

(2) $$OI = \alpha = d\left(\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\right),$$

d'où $$\frac{\alpha+d}{\alpha-d} = \frac{OA}{OB}\frac{m^2}{n^2},$$

ce qui permet de déterminer la position du point O.

Décrivons sur HK comme diamètre une circonférence, et posons HK$=2\rho$.

De la différence des racines de l'équation, on déduit :

$$\rho^2 = \alpha^2 - d^2 + \frac{n^2R^2 - m^2R'}{m^2-n^2} = OA.OB + \frac{OA.R'^2 - OB.R^2}{AB}.$$

Actuellement, il est facile de démontrer que la circonférence HMK est le lieu cherché. En effet, soit M un point quelconque ; tirons MA, MB et abaissons la perpendiculaire MP sur AB.

Appelons T et T' les tangentes menées de M aux cercles R et R', on aura :

$$T^2 = \overline{AM}^2 - R = \overline{AH}^2 \times \overline{MH}^2 + 2AH.HP - R^2$$
$$= (d + \alpha - \rho)^2 + 2\rho HP + 2\rho(d + \alpha - \rho)HP - R^2$$
$$= (d + \alpha)^2 + \rho^2 - 2\rho(d + \alpha) + 2(d + \alpha)HP - R^2$$

ou

(3) $$T^2 = \overline{OA}^2 + \rho^2 - 2\rho OA + 2OA.HP - R^2$$

et de même

$$T'^2 = \overline{BM}^2 - R'^2 = \overline{BH}^2 + \overline{MH}^2 - 2BH.HP - R'^2$$
$$= (\rho - \alpha + d)^2 + 2\rho H.P - 2\rho(\rho - \alpha + d)HP - R'^2$$
$$= (d - \alpha)^2 + \rho^2 - 2(\alpha - \alpha)\rho + 2(\alpha - d)HP - R'^2$$

ou

(4) $$T'^2 = \overline{OB}^2 + \rho^2 - 2\rho GB + 2OB.HP - R'^2$$

de (3) et (4) on conclut :

$$\frac{n^2T^2}{m^2T'^2} = \frac{\overline{OA}^2.OB + OB.\rho^2 - 2\rho.OA.OB + 2OA.OB.HP - R^2.OB}{\overline{OB}^2.OA + OA.\rho^2 - 2\rho OA.OB + 2OA.OB.HP - R'^2OA}$$

et, par suite, en vertu de l'expression trouvée pour ρ^2

$$n^2T^2 = m^2T'^2 \text{ ou } \frac{T}{T'} = \frac{m}{n}.$$

Ce lieu servira à la résolution du problème suivant :

Trouver un point tel que les tangentes menées de ce point à trois circonférences données soient proportionnelles à trois lignes données m, n, p.

La relation (2) appliquée à chacun des trois côtés du triangle ABC obtenu en joignant les centres A, B, C fournira trois points O, O' O" en ligne droite, et les rayons ρ' et ρ'' seront donnés par :

$$\rho'^2 = O'C.O'B + \frac{O'B.R''^2 - O'C.R'^2}{BC},$$
$$\rho''^2 = O''C.O''A + \frac{O''A.R''^2 - O''C.R^2}{AC}.$$

H. Lecocq.

I. — *Déterminer, dans le plan d'un triangle* ABC, *un point* O *tel que les angles* OAB, OBC *et* OCA *soient égaux et calculer leur expression commune* (*fig.* 1).

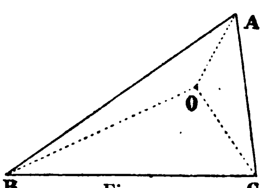


Fig. 1

On voit de suite que les angles COA, AOB et BOC sont respectivement égaux à $2^d - A$, $2^d - B$ et $2^d - C$, en sorte que le point O est déterminé par les trois axes décrits sur les côtés CA, AB, BC et capables des angles $2^d - A$, $2^d - B$ et $2^d - C$.

Il y a un second point O' pour lequel les angles O'AC, O'AB et O'CB sont égaux, et ce point est à la rencontre des segments décrits sur CA, AB, BC et capables des angles $2^d - C$, $2^d - A$ et $2^d - B$.

Soit OAB $= x$ et tg $x = u$, on aura

$$\frac{OA}{\sin(B - x)} = \frac{OB}{\sin x}, \quad \frac{OB}{\sin(C - x)} = \frac{OC}{\sin x}, \quad \frac{OC}{\sin(A - x)} = \frac{OA}{\sin x}$$

d'où $\sin^3 x = \sin(A - x)\sin(B - x)\sin(C - x)$,

et $u^3 = (\sin A - u\cos A)(\sin B - u\cos B)(\sin C - u\cos C)$

et, par suite :

(1) $(1 + \cos A\cos B\cos C)u^3 - (\cos B\cos C\sin A + \cos A\cos C\sin B + \cos A\cos B\sin C)u^2$
$+ (\sin B\sin C\cos A + \sin A\sin C\cos B + \sin A\sin B\cos C)u - \sin A\sin B\sin C = 0$,

or $A + B + C = 2^d$ d'où $\sin(A + B + C) = 0$ et $\cos(A + B + C) = -1$, en développant ces deux dernières égalités, on trouve :

$1 + \cos A\cos B\cos C = \sin B\sin C\cos A + \sin A\sin C\cos B + \sin A + \sin B\cos C$

$\sin A\sin B\sin C = \cos B\cos C\sin A + \cos A\cos C\sin B + \cos A\cos B\sin C$,

et l'équation (1) peut s'écrire :

$$(u^2 + 1)[(1 - \cos A\cos B\cos C)u - \sin A\sin B\sin C] = 0$$

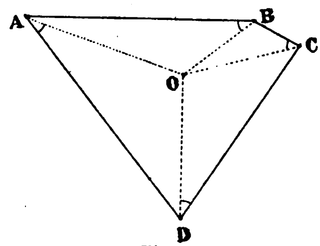
qui a deux racines imaginaires $u = \pm i$ et une réelle :

$$u = \frac{\sin A\sin B\sin C}{1 + \cos A\cos B\cos C}.$$

Les rapports entre OA, OB et OC seront donnés par

$$\frac{OA}{b^2c} = \frac{OB}{c^2a} = \frac{OC}{a^2b}.$$

II. — *Etant donnés les quatre angles* A, B, C, D *d'un quadrilatère, on mène par un point O quatre droites* OA, OB, OC, OD *faisant entre elles les angles consécutifs* AOB $= 2^d -$ A, BOC $= 2^d -$ B, COD $= 2^d -$ C, *et* DOA $= 2^d -$ D. *Déterminer les rapports qui doivent exister entre* OA, OB, OC, OD *pour que les angles* OBA, OCB, ODC *et* OAD *soient égaux, et calculer leur valeur commune* (*fig.* 2).


Fig. 2

Posons, comme ci-dessus, OBA $= x$ et tg $x = u$; on aura :

$$\frac{\sin x}{OA} = \frac{\sin(A - x)}{OB},$$

$$\frac{\sin x}{OB} = \frac{\sin(B - x)}{OC},$$

$$\frac{\sin x}{OC} = \frac{\sin(C - x)}{OD},$$

$$\frac{\sin x}{OD} = \frac{\sin(D - x)}{OA},$$

d'où $\sin^4 x = \sin(A - x)\sin(B - x)\sin(C - x)\sin(D - x)$,

ou

$u^4 - (\sin A - u\cos A)(\sin B - u\cos B)(\sin C - u\cos C)(\sin D - u\cos D) = 0$.

Cette équation développée devient :

(2) $(1 - \cos A\cos B\cos C\cos D)u^4 + (\Sigma\cos\cos\cos\sin)u^3 - \Sigma(\cos\cos\sin\sin)u^2$
$+ (\Sigma\cos\sin\sin\sin)u - \sin A\sin B\sin C\sin D = 0$.

Dans chacune des sommes Σ, on doit affecter chaque facteur trigonométrique d'une des lettres A, B, C, D, sans répétition, de façon à compléter toutes les combinaisons possibles ; mais

$$A + B + C + D = 4^d$$

d'où $\sin(A + B + C + D) = 0, \quad \cos(A + B + C + D = +1.$

En développant ces deux dernières égalités, on trouve

$$\Sigma \cos\cos\cos\sin = \Sigma \sin\sin\sin\cos$$

$$\Sigma \cos\cos\sin\sin = \Sigma \sin\sin\sin\sin = \Sigma \cos\cos\cos\cos - 1 =$$
$$\sin A \sin B \sin C \sin D + \cos A \cos B \cos C \cos D - 1.$$

L'équation (2) devient alors :

$(u^2 + 1)\{(1 - \cos A\cos B\cos C\cos D)u^2 + \Sigma\cos\cos\cos\sin - \sin A\sin B\sin C\sin D\} = 0,$
qui a deux racines imaginaires $u = \pm i$ et deux autres racines données par

(3) $(1 - \cos A\cos B\cos C\cos D)u^2 + (\Sigma\cos\cos\cos\sin)u - \sin A\sin B\sin C\sin D = 0.$

Si le quadrilatère est inscriptible, on a :

$$u = \operatorname{tg} x \pm \frac{\sin A \sin B}{\sqrt{1 - \cos^2 A \cos^2 B}}.$$

La détermination de u permet de calculer les rapports de longueur des droites OA, OB, OC, OD.

III. *Généralisation de la question.* — En désignant les angles du polygone par $A_1A_2A_3 \dots A_n$, on aura d'abord :

(4) $$A_1 + A_2 + A_3 + \dots A_n = 2^d(n - 2),$$

d'où $\sin(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = 0$

et $\cos(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = \pm 1$ selon que n est pair ou impair.

Or

(5) $$\sin(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = \Sigma C_{n-1}S_1 - \Sigma C_{n-3}S_3 + \Sigma C_{n-5}S_5 - \Sigma C_{n-7}S_7 + \dots$$

et

(6) $$\cos(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = \Sigma C_n - \Sigma C_{n-2}S_2 + \Sigma C_{n-4}S_4 - \Sigma C_{n-6}S_6 + \dots$$

le terme général $\pm \Sigma C_{n-p}S_p$ indique que la somme doit être étendue à n facteurs trigonométriques, savoir p sinus et $n - p$ cosinus, en épuisant toutes les permutations des n lettres $A_1A_2A_3 \dots A_n$ dont p seront affectées de sinus, et les $n - p$ autres, de cosinus.

L'équation générale du problème est :

$u^n = (\sin A_1 - u\cos A_1)(\sin A_2 - u\cos A_2)(\sin A_3 - u\cos A_3) \dots (\sin A_n - u\cos A_n).$

Or, en vertu de la relation (4) ou des deux (5) et (6) qui s'en déduisent, le degré de l'équation (7) peut s'abaisser à $(n - 2)$, car le premier membre est alors divisible par $(u^2 + 1)$, comme dans les cas précédents.

C'est ce qu'on pourra aisément vérifier, quel que soit n, pair ou impair. En effet, dans le premier cas, l'équation (7) devient :

(8) $$(\Sigma C_{n-1})u^n - u^{n-1}\Sigma C_{n-1}S_1 + u^{n-2}\Sigma C_{n-2}S_2 - u^{n-3}\Sigma C_{n-3}S_3 \dots + u^2\Sigma C_2S_{n-1} - u\Sigma C_1S_{n-1} + \Sigma S_n = 0$$

et les relations (5) et (6) deviennent :

(9) $$\Sigma C_{n-1}S_1 - \Sigma C_{n-3}S_3 + \Sigma C_{n-5}S_5 - \Sigma C_{n-7}S_7 \dots = 0.$$

(10) $$\Sigma C_n - \Sigma C_{n-2}S_2 + \Sigma C_{n-4}S_4 - \Sigma C_{n-6}S_6 \dots = +1.$$

Or, en remplaçant u^2 par -1 dans la somme des termes de degré pair,

cette somme est nulle d'elle-même, en vertu de 10, que n soit multiple de 4, ou multiple de 4 plus 2.

En mettant u en facteur commun dans les termes de degré impair, on aura, dans la parenthèse, une somme de termes de degré pair qui, pour $u^2 = -1$, s'annulera en vertu de (9).

Si d est impair, l'équation (8) devient :

$$(11)\quad (\Sigma C_n + 1)u^n - u^{n-1}\Sigma C_{n-1}S_1 + u^{n-2}\Sigma C_{n-2}S_2 - u^{n-3}\Sigma C_{n-3}S_3 \ldots\ldots$$
$$- u^2\Sigma C_2 S_{n-2} + u\Sigma C_1 S_{n-1} - \Sigma S_n = 0.$$

La relation (9) reste la même, mais (10) se change en :

$$(12)\qquad \Sigma C_n - \Sigma C_{n-2}S_2 + \Sigma C_{n-4}S_4 - \Sigma C_{n-6}S_6 \ldots\ldots = -1$$

et l'équation (11) sera aussi vérifiée par $u^2 = -1$ en raison de (9) et de (12).

H. Lecocq.

Trouver, dans le plan d'un triangle ABC *un point* O *tel que les triangles* OAB, OAC, et OBC *soient isopérimètres.*

Soit $a > b > c$.

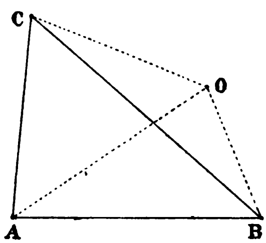
Prenons pour inconnues $\widehat{OAC} = x$ et $OA = y$. On doit avoir

$$y + b = a + OB$$
$$y + c = a + OC$$

d'où $\quad y + OC = c + OB,$

or $\quad OB = \sqrt{c^2 + y^2 - 2cy\cos(A - x)}$

$\quad OC = \sqrt{b^2 + y^2 - 2by\cos x}.$



Les équations du problème sont donc :

$$\begin{cases} (a-b)^2 - 2(a-b)y = c^2 - 2cy\cos(A-x) \\ (a-c)^2 - 2(a-c)y = b^2 - 2by\cos x, \end{cases}$$

d'où

$$(1)\quad \cos x = \frac{b^2 - (a-c)^2 + 2(a-c)y}{2by},$$

$$(2)\qquad \cos(A - x) = \frac{c^2 - (a-b)^2 + 2(a-b)y}{2cy}.$$

On éliminera x par la relation

$$\cos(A - x) = \cos A\cos x + \sin A \sin x$$

ce qui conduit à l'équation du second degré ci-dessous, dans laquelle

$$m^2 = b^2 - (a-c)^2 = 4(p-a)(p-c)$$
$$n^2 = c^2 - (a-b)^2 = 4(p-a)(p-b)$$

$$(3)\ 4\left\{ b^2(a-b)^2 + c^2(a-c)^2 - 2bc(a-b)(a-c)\cos - A - b^2c^2\sin^2 A \right\} y$$
$$+ 4\left\{ b^2n^2(a-b) + c^2m^2(a-c) - bcm^2(a-b)\cos A - bcn^2(a-c)\cos A \right\} y$$
$$+ b^2n^4 + c^2m^4 - 2bcm^2n^2\cos A = 0.$$

qu'on peut écrire, pour abréger,

$$4My^2 + 4Ny + P = 0.$$

Le dernier terme :

$$P = (bn^2 - cm^2)^2 + 4bcm^2n^2\sin^2\frac{A}{2} = 16(p-a)^2\left\{(b-c)^2(p-a)^2 + 4b^2c^2\sin^4\frac{A}{2}\right\}$$

est positif, quel que soit le triangle ABC.

N peut s'écrire :

$$N = 8(p-a)\left\{(p-a)^2(b-c)^2 + bc\sin^2\frac{A}{2}\left[(a-b)(p-c)+(a-c)(p-b)\right]\right\}$$

et, en vertu de l'hypothèse $a > b > c$ est également positif.

D'autre part, en remplaçant $2bc\cos A$ par $b^2 + c^2 - a^2$, on a :

$$M = a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)-ab(a^2+b^2)-ac(a^2+c^2)-bc(b^2+c^2)-b^2c^2\sin^2 A.$$

Soit S l'aire du triangle ; on sait que :

$$-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = 16S^2 \quad \text{et} \quad b^2c^2\sin^2 A = 4S^2,$$

d'où

$$M = 2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2+bc(a^2-b^2-c^2)+ab(c^2-a^2-b^2)+ac(b^2-a^2-c^2)-20S^2$$

$$M = 2a^2b^2\sin^2\frac{C}{2} + 4a^2c^2\sin^2\frac{B}{2} + 4b^2c^2\sin^2\frac{A}{2} - 20S^2, \text{ ou enfin}$$

$$M = 4S^2\left(\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2} - 2\right)$$

$$= 4\left\{(p-a)^2(p-b^2) + (p-a)^2(p-c)^2 + (p-b)^2(p-c)^2 - 2S^2\right\}$$

La formule $N^2 - MP$, par un calcul qui présente plus de longueurs que de difficultés, se réduit à :

$$N^2 - MP = 64b^3c^3\sin^2 A\,\sin^2\frac{A}{2}(p-a)^2(p-b)(p-c) = \frac{256S^6}{p^2}.$$

On voit donc que les racines de l'équation (3) sont toujours réelles ; mais pour qu'elles soient acceptables, il faut qu'elles soient telles que $\cos x$ et $\cos(A-x)$ soient moindres que 1 en valeur absolue, et comme y est essentiellement positif, il suffit que y soit supérieur à la plus grande des quantités $(p-b)$ ou $(p-c)$, c'est-à-dire seulement $y > (p-c)$ en vertu de l'hypothèse $a > b > c$.

La discussion est donc très simple, puisque N et P sont positifs.

1° Si M est positif ; pas de solution car les racines sont toutes deux négatives.

2° Si M est négatif ; racines de signes contraires. La racine positive sera acceptable si elle est plus grande que $p - c$.

Application numérique (proportion de la figure)

$a = 6$, $M = -314{,}75$, $N = 919{,}5$, $P = 11\,106$,
$b = 5$,
$c = 4$, $y = 4{,}77$, $x = 32°50'$.

H. Lecocq.

SOLUTION DE LA QUESTION 714

(*Suite*, voir n° d'avril, p. 120)

La première de ces expressions pourra s'écrire

$$\frac{x-\varepsilon}{x} + \frac{y+\varepsilon}{y}.$$

Or, cette dernière expression est forcément supérieure à 2, elle est en effet égale à

$$2 + \frac{\varepsilon}{y} - \frac{\varepsilon}{x},$$

quantité supérieure à 2 puisque x est plus grand que y.

On résonnerait de même dans le cas où l'on aurait $x < y$; si $x = y$, il est évident que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ est égal à 2.

On démontrerait de la même manière que $\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right)$ et $\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right)$ sont supérieurs à 2. Donc la somme de ces trois expressions est supérieure à 6.

C. Q. B. D.

Remarque. — L'inégalité (2) exprime une propriété qui peut s'énoncer ainsi :

Si la somme de trois nombres est égale à l'unité, la somme de leurs inverses est plus grande que 2.

Cette propriété peut être facilement généralisée. On démontrerait, en effet, de la même façon que nous venons de le faire pour trois nombres, que si l'on a n nombres, a, b, c, ...m, tels que $a + b + c + ... + m = 1$ on a la relation

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + ... + \frac{1}{m} > n^2.$$

Cette propriété conduit elle-même à une propriété encore plus générale, qui s'en déduit immédiatement :

Si la somme de n nombres est égale à a, la somme de leurs inverses est supérieure à $\frac{n^2}{a}$.

(Remarquons que dans le cas de $a = b = c = ... = m$, cette relation devient $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + ... + \frac{1}{m} = \frac{n^2}{a}$; de même que, dans les cas particuliers examinés plus haut, on aurait $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + ... + \frac{1}{m} = n^2$, ou

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2.$$

Solution de MM. **de la Vaissière, A. Droz-Farny, Saint-Goyens, Alfredo Schiappa Manteira, Plakhowo, Svéchnicoff, Georges Stambolieff.**

QUESTIONS PROPOSÉES

Si, dans un triangle, la droite d'Euler est parallèle au côté BC, O étant le centre du cercle circonscrit, N le centre de gravité du périmètre du triangle, h la hauteur correspondante au côté BC et r le rayon du cercle inscrit, on a

$$\overline{\mathrm{ON}}^2 = \frac{9r^2 - h^2}{18}.$$

(Jorge F. d'Avillez).

Soient deux cercles dans le plan et un point quelconque A ; on prend la polaire de ce point A par rapport aux deux cercles. Ces polaires se coupent en M. On joint A et M. Soit P le milieu de la longueur AM. Démontrer que le point P est toujours situé sur l'axe radical des deux cercles quelle que soit la loi de déplacement du point A dans le plan.

Léopold Massip.

Un cercle variable O″ intercepte sur deux circonférences données O et O′ de rayons R et R′, deux cordes égales de longueur donnée $2l$;

1° Lieu de l'intersection des cordes interceptées (axe radial de O et O′) ;

2° Lieu du centre O″ pour les cinq positions relatives des cercles O et O′ (hyperbole ou ellipse).

H. Lecocq.

On donne deux couronnes circulaires auxquelles on mène des cordes parallèles AB, A′B′ tangentes aux cercles intérieurs.

Lieu des points de rencontre des droites AA′, BB′ ou AB′, BA′ qui joignent leurs extrémités (quatre cercles).

H. Lecocq.

Etant donnés un cercle O et un point P dans son plan ; mener un diamètre AB tel que le rapport $\frac{PA}{PB}$ soit donné et égal à un nombre λ.

Vazou.

Etant donnés deux cercles O et O′, trouver un point P tel que si l'on mène de ce point des tangentes PM, PM′ aux deux cercles, l'une de ces tangentes PM ait une longueur donnée l et que l'angle $\widehat{PMPM'}$ ait une valeur donnée V.

Vazou.

Etant donnés une droite $x'x$ et un point A dans son plan, déterminer sur $x'x$ une portion de droite BC de longueur donnée a qui soit vue du point A sous un angle donné.

Vazou.

Etant donnés un cercle O et un point A dans son plan, mener à ce cercle une tangente CB de longueur donnée a, telle que la droite AM joignant le point A au milieu de BC ait une longueur donnée m.

Vazou.

Etant donnés un cercle O et un point A dans son plan, mener à ce cercle une tangente CB de longueur donnée a et qui soit vue du point A sous un angle donné.

Vazou.

Le Directeur-gérant,

GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE ST-CYR

236. Mathématiques. — Dans un cercle de rayon R placer trois cordes de longueurs données α, β, γ de manière à ce que le triangle formé par leurs intersections soit semblable à un triangle donné ayant $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ pour angles. — Expression des côtés, de la surface et du rayon du cercle circonscrit. — Cas particulier du triangle équilatéral. **H. Lecocq.**

237. — Déterminer dans le plan d'un triangle ABC un point O tel que pour les trois triangles OAB, OAC, OBC, le produit des trois côtés soit le même. **H. Lecocq.**

238. Epure. — Dans le plan horizontal de côte O, on donne un cercle de rayon 0,05 centimètres et tangent à la parallèle aux grands côtés du cadre passant par le centre de la feuille. Le point de contact ω étant ce centre même. Le point S tel que $O\omega S = 0,15$ centimètres est la projection du sommet du cône de côte 0,15 centimètres. Un prisme pentagonal régulier est horizontal, son arête supérieure passe par le point S et est parallèle aux grands côtés du cadre. — Intersection de ces deux corps. **Massip.**

238bis. Calcul trigonométrique. — Résoudre un triangle connaissant $a = 25\,678^m{,}45$, $b = 75\,238{,}48$, $C = 25°45'56''7$.

239. Questions d'Oral. — On donne deux parallèles A et B. Sur A on prend deux points α et β sur B un point γ. On joint $\beta\gamma$. On demande de tracer par α une sécante telle que la somme des triangles soit maximum au minimum.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

240. Mathématiques. — Calculer les côtés d'un triangle, connaissant r', r'' et $a + b = l$. Construction géométrique.

Vazou.

Calculer et construire les côtés d'un triangle, connaissant r'', r''' et B — C. **Vazou.**

Construire un triangle, connaissant a, $b + c = l$ et la longueur α de la bissectrice de A. **Vazou.**

241. — Calculer par logarithmes

$$x = \frac{\sqrt[5]{1\,845} + \pi - 7\pi}{(1 + 1\,842)^2 \sqrt[3]{59\,667}}.$$

242. Physique et Chimie. — A l'un des plateaux d'une balance hydrostatique, on suspend, par un fil de poids négligeable, un morceau de zinc plongeant dans de l'eau ; le poids de ce zinc dans l'air est de 200 grammes.

A l'autre plateau, on suspend de la même façon un morceau de platine plongeant dans du mercure.

1° Tout l'appareil étant à la température de 0°, quel doit être le poids du morceau de platine pour que la balance soit en équilibre d'elle-même, sans poids ni tare ?

2° La température de tout le système étant alors portée à 50°, quel poids doit-on mettre pour rétablir l'équilibre, et dans quel plateau de la balance ?

Données :	Densité	de l'eau à 0°	0,999871 ;
	—	du mercure à 0° . . .	13,596 ;
	—	du zin à 0°	6,8
	—	du platine à 0°	21,16 ;
	—	de l'eau à 50°	0,9882.

Coefficient	de dilatation	absolue du mercure entre 0° et 100°.	$\frac{1}{3\,550}$;
—	—	linéaire du zinc	0,0000294 ;
—	—	— platine	0,0000087.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

243. Mathématiques. — On donne l'équation

$$(2 \cos \alpha - 1)x^2 - 4x + 4 \cos \alpha + 2 = 0,$$

désignant un angle aigu.

1° Pour quelles valeurs de α les racines sont-elles réelles ?

2° Quels sont les signes des racines pour ces valeurs de α ?

3° Rendre le produit des racines calculable par logarithmes.

(*Au choix*). — *a*) Démontrez les théorèmes relatifs à la théorie du plus grand commun.

b) Théorie de l'extraction de la racine carrée.

c) Caractères de divisibilité par 3 et 9.

244. Physique. — Un tube cylindrique de longueur L est ouvert à ses deux extrémités. Une partie, de longueur l, est plongée verticalement dans une cuve à mercure. On ferme alors et on maintient fermé avec le doigt l'orifice supérieur du tube, puis on élève verticalement le tube tout entier jusqu'à ce que la partie inférieure cesse de plonger dans le mercure de la cuve. On demande de caculer la longueur x comprise entre les niveaux que le mercure occupait dans le tube dans la première et dans la seconde position. On désigne par H la hauteur du baromètre pendant l'expérience.

Application numérique. $\begin{cases} 1° \ L = 0^m,85, & l = 0^m,32, & H = 0^m,74. \\ 2° \ L = 0^m,80, & l = 0^m,60, & H = 0^m,80. \end{cases}$

(*Au choix*). — *a*) Bouteille de Leyde — batteries.

b) Foudre — paratonnerres.

c) Aimants naturels et artificiels — pôles.

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES — SCIENCES)

245. Mathématiques. — Calculer les coordonnées du point A symétrique du point B par rapport à un point C, B a pour coordonnées α, β ; C a pour coordonnées γ, δ.

(*Au choix*). — *a*) Centre de gravité d'un trapèze, d'un prisme.

b) Réduction d'un nombre quelconque de forces appliquées à un corps solide d'abord, à trois, puis à deux.

c) Condition d'équilibre d'un corps solide libre sollicité par un nombre quelconque de forces.

245bis. Physique. — Le courant produit par une pile de 100 éléments Bunsen passe dans un circuit extérieur dont la résistance est égale à 10 ohms. On demande quelle sera l'intensité du courant si l'on dispose les 100 éléments en 4 séries de 25 chacune, associées en batteries. Comment faudrait-il disposer les éléments pour rendre maximum l'intensité du courant? — Force électromotrice d'un élément Bunsen : 1,9 volt ; résistance intérieure de cet élement : 0,1 ohm.

245ter (*Au choix*). — *a*) Pendule et applications.

b) Machine d'atwood et lois de la chute des corps.

c) Densité des gaz.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

246. Arithmétique. — Une personne avait placé une somme à 5 %. Elle l'a retirée au bout d'un an et du capital réuni aux intérêts elle a fait deux parts. Le tiers est employé à acheter de la rente à $4\,{}^1/_2$ % au cours de 111, ce qui donne un intérêt annuel de 350. Les deux tiers qui restent sont placés à 3 % et donnent 603 francs d'intérêt par an. On demande quelle somme cette personne avait d'abord placée et quel est le cours du 3 %.

246bis. — Calculer $x = \sqrt{\sqrt[3]{\dfrac{278\,940 + \sqrt{7\,528}}{\pi \times \sqrt{6\,754}}}}$.

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

247. Arithmétique. — Une roue qui a 14 dents tourne de 5 dents en 9 secondes. Une autre roue fait 21 tours pendant que la première en fait 25. Combien les deux roues feront-elles de tours en 3 heures 40 minutes et 30 secondes.

248. Algèbre. — Résondre $2x + 2\sqrt{a^2 + x^2} = \dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

248bis. — Calculer : $x = \sqrt[5]{\sqrt[3]{7\,578} + \sqrt{75\,628}}$.

DEUXIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

Cours de Géométrie Descriptive. — *Géométrie Cotée* à l'usage des candidats à Saint-Cyr, par J. Caron, ancien élève de l'Ecole Normale supérieure, agrégé des Sciences Mathématiques, directeur des travaux graphiques à l'Ecole Normale supérieure, professeur de Géométrie descriptive. — Librairie *Félix Alcan*, 108, boulevard Saint-Germain. Prix : 6 francs.

Le nouveau programme de Saint-Cyr a fait faire des progrès à la Géométrie cotée jusqu'ici trop dédaignée. Après les remarquables ouvrages que nous avons déjà signalés, d'autres ont vu le jour, beaucoup sont sous presse. M. Caron, dont tous les professeurs et tous les élèves connaissent déjà la *Géométrie Descriptive* à l'usage des classes de Spéciales vient, avec l'autorité qui s'attache à son nom, de faire paraître sa *Géométrie Cotée*.

Le texte en est clairement rédigé, les figures y sont nettes ; de nombreux exercices théoriques et numériques intéresseront les candidats et les forti-

fieront dans leurs études. L'ouvrage est divisé en quatorze livres et chaque livre en chapitres. Ces derniers, dans les différents paragraphes qui les composent, renferment toutes les questions. Pour que nos lecteurs s'en rendent comptent, nous allons leur détailler le livre X, par exemple, relatif aux surfaces de révolution :

CHAPITRE I

I. *Propriétés des surfaces de révolutions.*

II. *Déterminer un point d'une surface de révolution. — Plan tangent en ce point.*

III. *Contours apparents.*

CHAPITRE II

I. *Plan tangent parallèle à un plan donné.*

II. *Points brillants.*

III. *Plan tangent ayant son point de contact sur une parallèle donnée.*

IV. *Plan tangent ayant son point de contact sur un méridien donné.*

G. M.

TROISIÈME PARTIE

QUESTION 716

Démontrer que :

$$\frac{a^2b^2}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)} = \frac{(a^2+b^2)}{a^2b^2}\,\frac{1}{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}$$

$$- \frac{(a^2+b^2)}{a^2b^2}\,\frac{1}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} - \frac{1}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2}.$$

E.-N. Barisien.

Solution, par **A. Droz-Farny.**

Représentons respectivement par A, B, C les trois termes de droite ; on a :

$$A - B = \frac{(a^2+b^2)^2(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta) - (a^2+b^2)(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)}{a^2b^2(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)},$$

$$A - B - C = \frac{(a^2+b^2)(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta) - (a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)}{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2}$$

$$= \frac{a^2b^2}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)}.$$

A. Droz-Farny.

Solutions exactes de MM. **Plakhowo, Stambolieff.**

QUESTIONS 717 ET 718

717. — *Comment peut-on écrire immédiatement les carrés des nombres de la forme* $10a + 5$ *et* $100a + 5$? ($a < 10$).

(Jean Negretzu).

718. — *Les carrés de nombres de la forme* $10a + 5$, $100a + 5$ *et*

$1\,000a + 5$ *étant supposés formés, comment peut-on écrire immédiatement les racines carrées.*

(Généralités) (**Jean Negretzu**).

Elevons le nombre $10a + 5$ au carré, nous aurons $100a^2 + 100a + 25$. Prenons maintenant 100 comme diviseur commun, — nous aurons $100(a^2 + a) + 25$, ou $100a(a + 1) + 25$; cela veut dire que si le nombre est $10a + 5$ pour former son carré, il ne faut que multiplier le nombre a, par son suivant et écrire à la fin 25.

Si nous avons $100a + 5$ élevons ce nombre au carré, nous aurons $10\,000a^2 + 1\,000a + 25$. Prenons maintenant 100 comme diviseur commun, nous aurons $100(100a^2 + 10a) + 25$, ou $100\left[10a(10a + 1)\right] + 25$. Ainsi le carré du nombre $100a = 5$ sera égal à $10a(10a + 1)$ et à 25 écrit à sa droite. Si nous avons $1\,000a + 5$, élevons ce nombre au carré, nous aurons $1\,000\,000a^2 + 10\,000a + 25$. Prenons de nouveau 100 comme diviseur commun, nous aurons $100(10\,000a^2 + 100a) + 25$ ou $100\left[100a(100a + 1)\right] + 25$.

Ainsi on peut généraliser ce problème en disant que tout nombre, ayant à sa gauche un nombre quelconque suivi de quelques zéros et terminé par un 5, élevé au carré, sera égal au nombre de ces dizaines, multiplié par ce même nombre augmenté d'une unité, et ayant 25 à sa droite.

Si nous avons maintenant $100a + 10b + 5$, et si nous l'élevons au carré, nous aurons $(100a + 10b)^2 + 10(100a + 10b) + 25 = 10\,000a + 2\,000b + 100b^2 + 1\,000a + 100b + 25$; prenant 100 comme diviseur commun, nous aurons $100(100a^2 + 20b + b^2 + 10a + b) + 25$; où, prenant $a + b$ comme diviseur commun, nous aurons $100\left[(10a + b)\ (a + b + 1)\right] + 25$.

Si les carrés de ces nombres sont formés comme par exemple : $100a(a + 1) + 25$, alors on pourra écrire tout de suite la racine carrée de ce nombre.

a désigne les distances, cela veut dire que si a est multiplié par $a + 1$, la racine carrée de ce nombre sera $10a + 5$, — et ainsi de suite.

La racine carrée du nombre $100\left[10a(10a + 1)\right] + 25$, sera : $100a + 5$; sa racine carrée du nombre $100\left[(10a + b)\ (10a + b + 1)\right] + 25$ sera $100a + 10b + 5$, en suuposant bien entendu que $a < 10$ et que $b < 10$.

N. Plakhowo.

Solution exacte : M. **L'Huillier.**

QUESTION 719

Solution, par M. **A. Boutin**

Dans tout triangle T *de sommets* A, B, C :

1° *Le produit des distances d'un sommet aux quatre centres des cercles tangents aux trois côtés est égal au produit des carrés des deux côtés aboutissant au sommet considéré.*

2° *Le produit des douze distances de chacun des centres des cercles tangents aux trois côtés de* T *est égal à la quatrième puissance du produit des trois côtés.*

3° *Le produit des segments interceptés par les sommets de* T *sur les côtés du triangle formé par les centres des cercles inscrits à* T *est égal au carré du produit des trois côtés de* T.

4° *Le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par trois quelconques des quatre centres des cercles taugents aux côtés de* T *est égal au double du rayon du cercle circonscrit à* T.

5° *L'aire du triangle formé par le centre des cercles ex-inscrits à* T *est équivalente au produit du périmètre de* T *par le rayon de son cercle circonscrit.*

6° *Les aires des triangles formés par les centres des quatre cercles tangents à* T *sont inversement proportionnelles, chacune au rayon du cercle tangent dont le centre n'est pas un sommet du triangle.*

7° *On considère le triangle dont un des sommets est le centre du cercle ex-inscrit dans l'angle* A *et les autres sommets sont* B *et* C.

On considère les deux triangles analogues. Le produit des aires de ces trois triangles, multiplié par le produit des rayons de leurs cercles circonscrits, est égal au cube de l'aire de T, *multiplié par le cube du rayon de son cercle circonscrit.* **(E.-N. Barisien).**

1° Des formules connues :

$$AI = \frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}, \quad AI' = \frac{p}{\cos\frac{A}{2}}, \quad AI'' = \frac{p-c}{\sin\frac{A}{2}}, \quad AI''' = \frac{p-b}{\sin\frac{A}{2}}.$$

On tire :

$$AI.AI'.AI''.AI''' = \frac{p(p-a)(p-b)(p-1)}{\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}} = b^2c^2.$$

2° Le produit des douze distances en question, d'après le paragraphe précédent, est : $b^2c^2.a^2c^2.a^2b^2 = a^4b^4c^4.$

3° $$BI'.BI'''.AI'''.AI''.CI''.CI' = \frac{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}} = a^2b^2c^2.$$

4° I est l'orthocentre du triangle I'I''I''', donc les quatre triangles obtenus en prenant trois quelconques de cés points pour sommets ont même cercle circonscrit ; son diamètre a pour valeur :

$$\frac{I''I'''}{\sin I'} = \frac{4R\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = 4R.$$

5° L'aire considérée a pour expression :

$$\frac{1}{2}\, I'I''.I'I''' \sin I' = 8R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 2pR.$$

6° On a, comme au paragraphe précédent :

$$II''I''' = \frac{1}{2}\cdot\frac{bc\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\frac{abc}{2}\cdot a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{abc}{2r'},$$

d'où

$$II''I'''.r' = II'I'''.r'' = = II'I''.r'''\ \frac{abc}{2} = 2RS - 2pRr = I'I''I'''.r.$$

7° Le produit de l'aire d'un des triangles considérés par un rayon de son cercle circonscrit a pour expression :

$$\frac{a.\mathrm{I'B.I'C}}{4} = \frac{a(p-b)(p-c)}{4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}},$$

d'où, pour la quantité cherchée :

$$\frac{abc}{64}\cdot\frac{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}{\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2}} = \frac{a^3b^3c^3}{64} = \mathrm{S^3R^3}.$$

Solutions : MM. **L'Huillier, L. Goyens, A. Droz-Farny.**

QUESTION 721

Solution, par M. **Ernest Foucart**

Montrer que si les trois côtés a, b, c *d'un triangle vérifient la relation*

$$5(a^2 + b^2 + c^2) = 6(bc + ca + ab),$$

le centre de gravité du triangle est situé sur la circonférence du cercle inscrit. **E.-N. Barisien.**

L'équation du cercle inscrit est

$$(1) \qquad \sum \cos\frac{A}{2}\sqrt{x} = 0.$$

On a

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc},$$

(1) peut donc s'écrire

$$\sum \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}x} = 0$$

ou

$$\sum \sqrt{\frac{b+c-a}{4bc}x} = 0.$$

Les coordonnées du centre de gravité étant inversement proportionnelles aux côtés correspondants, ce point sera sur le cercle inscrit si

$$\sum \sqrt{\frac{b+c-a}{4bc}\frac{1}{a}} = 0,$$

c'est-à-dire si

$$\sum \sqrt{b+c-a} = 0,$$

ce qui, tous calculs faits, donne

$$5(a^2 + b^2 + c^2) = 6(bc + ca + ab).$$

C'est la relation indiquée.

Solutions exactes de MM. **Boutin, Jorge F. d'Avillez, A. Droz-Farny, L. Goyens, Plakhowo, L'Huillier, Francis Dauzats.**

QUESTION 722

1° *Dans le triangle rectangle isoscèle, si le rapport de l'hypoténuse au côté est compris entre* $\frac{m}{n}$ *et* $\frac{p}{q}$, *il est compris entre* $\frac{p+2q}{p+q}$ *et* $\frac{m+2n}{m+n}$.

2° *Dans le triangle équilatéral, si le rapport de la hauteur au côté est compris entre* $\frac{m}{n}$ *et* $\frac{p}{q}$, *il est compris entre* $\frac{4m + 3n}{4(m + n)}$ *et* $\frac{4p + 3q}{4(p + q)}$.

1° Le rapport est $\sqrt{2}$. Supposons $\frac{p}{q} > \sqrt{2}$ et cherchons α, β, γ, δ tels que

$$\frac{\alpha p + \beta q}{\gamma p + \delta q} < \sqrt{2}.$$

On déduit de cette inégalité

$$\frac{p}{q} > \frac{\beta - \delta\sqrt{2}}{\gamma\sqrt{2} - \alpha}.$$

Elle sera satisfaite si l'on a

$$\frac{\beta - \delta\sqrt{2}}{\gamma\sqrt{2} - \alpha} \leqslant \sqrt{2},$$

ou

$$\beta - 2\gamma + \sqrt{2}(\alpha - \delta) \leqslant 0.$$

En particulier, le 1er nombre s'annule si

$$\alpha = \delta, \quad \gamma = 1, \quad \beta = 2.$$

Si donc on a $\frac{p}{q} > \sqrt{2}$, on a aussi $\frac{\lambda p + 2q}{p + \lambda q} < \sqrt{2}$.

2° Le rapport est $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Nous avons à chercher les valeurs de α, β, γ, δ telles que si $\frac{m}{n} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, on a $\frac{\alpha m + \beta n}{\gamma m + \delta n} < \frac{\sqrt{3}}{2}$,

on en déduit

$$\frac{m}{n} < \frac{\delta\sqrt{3} - 2\beta}{2\alpha - \gamma\sqrt{3}},$$

et on doit avoir

$$\frac{\delta\sqrt{3} - 2\beta}{2\alpha - \gamma\sqrt{3}} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ou bien

$$2\sqrt{3}(\delta - \alpha) + 3\gamma - 4\beta \geqslant 0.$$

En particulier, le premier nombre est nul si l'on a

$$\alpha = \delta, \quad \gamma = 4, \quad \beta = 3.$$

Si donc, on a $\frac{m}{n} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, on a aussi $\frac{\lambda m + 3n}{4m + \lambda n} < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On vérifie également que les valeurs $\alpha = \delta = 4$, $\gamma = 3$, $\beta = 1$ de l'énoncé satisfont à l'inégalité précédente. **H. L'Huillier.**

QUESTION 723

Solution, par M. **Jorge d'Avillez**

En désignant par h_1, h_2, h_3 *les hauteurs relatives aux côtés* BC, CA, AB *d'un triangle* ABC; *par* r_1, r_2, r_3 *les rayons des cercles exinscrits correspondants, on a (notations ordinaires)*

$$\left(\frac{r_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{r_3}{h_3}\right)^2 = \frac{8R^2 + r^2 - p^2}{2r_2}.$$

Dair Daglou.

On sait que

$$r_1 = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

$$h_1 = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

donc
$$\left(\frac{r_1}{h_1}\right)^2 = \frac{a^2}{4(p-a)^2} = \frac{(r_1-r)^2}{4r^2},$$
et, de même
$$\left(\frac{r_2}{h_2}\right)^2 = \frac{b^2}{4(p-b)^2} = \frac{(r_2-r)^2}{4r^2},$$
$$\left(\frac{r_3}{h_3}\right)^2 = \frac{c^2}{4(p-c)^2} = \frac{(r_3-r)^2}{4r^2}.$$

On aura alors
$$\left(\frac{r_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{r_3}{h_3}\right)^2 = \frac{(r_1-r)^2 + (r_2-r)^2 + (r_3-r)^2}{4r^2},$$
donc
$$\left(\frac{r_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{r_3}{h_3}\right)^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 3r^2 - 2r(r_1+r_2+r_3)}{4r^2}.$$

En substituant ci-dessus les formules connues
$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 16R^2 - r^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr,$$
$$r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r,$$
on a finalement
$$\left(\frac{r_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{r}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{r_3}{h_3}\right)^2 = \frac{8R^2 + r^2 - p^2}{rr^2}.$$

Solutions exactes : MM. **Plakhowo, Boutin.**

QUESTION 725

Solution, par **Svéchnicoff** à Ouralsk

Les perpendiculaires élevées respectivement aux côtés AB *et* AC *du triangle* ABC *par les sommets* B *et* C *coupent, l'une au point* B', *l'autre au point* C', *la bissectrice intérieure de l'angle* BAC. *Démontrer que le cercle tangent en* A *à* AB, *et passant par* B', *et le cercle en* A *à* AC *et passant par* C' *se coupent sur la médiane issue de* A.

(M. d'Ocagne).

Soient P et Q les centres de ces cercles et B'' et C'' les milieux des droites AB' et AC'. Les triangles semblales APB'' et AQC'' donnent $\overline{AP} : \overline{AQ} = \overline{AB''} : \overline{AC''}$, d'où l'on a $\overline{AP} : \overline{AQ} = \overline{AB'} : \overline{AC'}$. Les triangles semblables ABB' et ACC' donnent $\overline{AB'} : \overline{AC'} = \overline{AB} : \overline{AC}$. Ainsi, on a $\overline{AP} : \overline{AQ} = c : b$. Continuons la droite CA et prenons $\overline{AD} = \overline{AC}$. Alors $\widehat{BAD} = \widehat{PAQ}$. Les triangles APQ et ABD sont semblables. Il en résulte que $\widehat{AQP} = \widehat{ADB}$. Soit M le point d'intersection des circonférences P et Q. $\widehat{BAM} = \widehat{QAM} = \widehat{QAB} = (90° - \widehat{AQP}) - (90° - \widehat{BAC}) = \widehat{BAC} - \widehat{AQP} = \widehat{BAC} - \widehat{ADB} = <$ ADD. Donc, la droite AM est parallèle à BD et le point M est situé sur la médiane du triangle ABC issue de A.

Solutions exactes : **Ernest Foucart, A. Droz-Farny, Francis Dauzats, L'Huillier.**

QUESTION 726

Solution, par Ernest Foucart

Soit ABCD *un quadrilatère dont les diagonales se coupent en* O *à angle droit. Les perpendiculaires élevées en* A *à* AB *et en* C *à* CD *se coupent en* H ; *les perpendiculaires élevées en* B *à* AB *et en* D *à* CD *se coupent en* I. *Les symétriques du point* H *par rapport à* A *et* C *sont* a *et* e, *du point* I *par rapport à* B *et* D, b *et* d. *On prend les isotomiques* α, β, γ, δ *des points* C, D, A, B *respectivement par rapport aux segments* OA, OB, OC, OD. *Démontrer que les droites* $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ *sont perpendiculaires à la direction commune des droites* $\alpha\beta$ *et* $\gamma\delta$.

(M. d'Ocagne).

Démontrons que $a\alpha$ est perpendiculaire à $\alpha\beta$ (démonstrations analogues pour les autres cas).

Soit $\widehat{ABO} = \theta, \quad \widehat{CDO} = \theta'.$

On a $\widehat{HCA} = \theta, \quad \widehat{AHC} = \theta - \theta'.$

Le triangle AHC donne alors

$$Aa = AH = AC\frac{\sin\theta'}{\sin(\theta-\theta')}.$$

Le triangle $\alpha O\beta$ donne

$$(1)\qquad \operatorname{tg}\beta\alpha O = \frac{\beta O}{\alpha O} = \frac{BD}{CD}.$$

On sait que dans un triangle quelconque, on a (notation habituelle)

$$\operatorname{cotg} B = \frac{c - b\cos A}{b\sin A}.$$

Cette formule, appliquée au triangle $A\alpha a$, donne

$$\operatorname{cotg}\widehat{A\alpha a} = \frac{A\alpha - Aa\cos\widehat{\alpha A a}}{Aa\sin\widehat{\alpha A a}}\ \frac{OC + AC\dfrac{\sin\theta'}{\sin(\theta-\theta')}\cos\theta}{AC\dfrac{\sin\theta'}{\sin(\theta-\theta')}\sin\theta}$$

$$\operatorname{cotg}\widehat{A\alpha a} = \frac{OC\dfrac{\sin(\theta-\theta')}{\sin\theta\sin\theta'} + AC\operatorname{cotg}\theta}{AC} = \frac{OC(\operatorname{cotg}\theta' - \operatorname{cotg}\theta) + AC\operatorname{cotg}\theta}{AC}$$

$$\operatorname{cotg}\widehat{A\alpha a} = \frac{AO\operatorname{cotg}\theta + OC\operatorname{cotg}\theta'}{AC} = \frac{BO + OD}{AC} = \frac{BD}{AC}$$

$$(2)\qquad \operatorname{cotg}\widehat{A\alpha a} = \frac{BD}{AC}.$$

La comparaison de (1) et (2) montre que $\alpha\beta$ et $a\alpha$ sont rectangulaires.

C.Q.F.D.

QUESTION 727

Solution, par Ernest Foucart

Soient a, b, c *les sommets d'un triangle,* O *le cercle inscrit à ce triangle et* o *le centre de ce cercle. On mène à* o *une tangente quelconque* T, *elle rencontre la droite* oa *en un point d'où l'on mène une autre tangente à* O. *Cette dernière droite rencontre en* α *le côté du triangle opposé au*

sommet a; *on obtient de même, avec* T, *les points* β *et* γ *sur les deux autres côtés du triangle. Démontrer que les points* α, β, γ *appartiennent à une droite qui passe par le centre* o. **(Mannheim).**

Soient a', b', c', les points de contact de O avec bc, ca, ab; a_1, b_1, c_1 les points de contact avec O des tangentes qui déterminent les points α, β, γ, m le point de contact de T. Les droites ma_1, mb_1, mc_1 sont respectivement parallèles à $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$. Il est alors facile de voir que $\widehat{b_1c'} = \widehat{b'c_1}$ $\widehat{b_1a'} = \widehat{b'a_1}$. Donc a_1a', b_1b', c_1c' sont parallèles. Les points α, β, γ sont évidemment sur une même droite passant par o et perpendiculaire à la direction commune de ces droites.

Solutions exactes : MM. **Francis Dauzats**; **A. Droz-Farny**; **L'Huillier.**

QUESTION 728

Etant donnés trois nombres positifs x, y, z *tels que* $x + y + z = 1$; on a : 1° $x^2(1 - x) + y^2(1 - y) + z^2(1 - z) > b(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z)$;

$$2^\circ \quad \frac{(1 - x)(1 - y)(1 - z)}{(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z)} > 8;$$

$$3^\circ \quad xyz > \frac{1}{24}.$$

J.-F. d'Avillez.

Il faut prouver que $(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) < xyz$. Si nous remplaçons l'unité par $x + y + z$, nous aurons à prouver que

$$(x + y + z)(x + z - y)(z + y - x) < xyz.$$

Développons le premier nombre; nous aurons :

$$x^2z + yz^2 + {}^2y + y^2z + xy^2 + xz^2 - 2xyz - x^3 - y^3 - z^3 < xyz,$$

ou, en simplifiant, nous aurons

$$3xyz + x^3 + z^3 + y^3 > xz(x + z) + yz(y + z) + xy(x + y),$$

et si nous avons l'inégalité (α) $3xyz < x^3 + y^3 + z^3$, ce qui peut être prouvé facilement et en retranchant cette inégalité de la proposée, nous aurons $2(x^3 + y^3 + z^3) > xz(x + z) + yz(y + z) + xy(x + y)$,

ce qui est facile à démontrer directement, puisque $x^2 + y^2 > 2xy$, et, maintenant, en multipliant cette inégalité par $x + y$, nous aurons

$$x^3 + y^3 + xy(x + y) > 2xy(x + y).$$

En simplifiant $\quad x^3 + y^3 > xy(x + y)$;

et de même $y^3 + z^3 > yz(y + z)$, et $z^3 + x^3 > zx(z + x)$.

Ajoutons ces inégalités membre à membre

$$2(x^3 + y^3 + z^3) > xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x),$$

et si cette inégalité est vraie, nous aurons l'inégalité à prouver

$$(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) < xyz;$$

et nous aurons

1° $x^2(1 - x) + y^2(1 - y) + z^2(1 - z) > b(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z)$;

et par là est résolue partiellement la question 1704, proposée par M. Weill dans les *Nouv. An.* 1893.

2° $\dfrac{(1 - x)(1 - y)(1 - z)}{(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z)} > 8$; mais cette inégalité n'est pas juste si

l'un des facteurs du dénominateur devient négatif, puisque le quotient devient aussi négatif et qu'une quantité négative ne peut jamais être plus grande qu'une quantité positive. Quant à

3° $$xyz < \frac{1}{24}.$$

Elevons au cube l'équation de condition, nous aurons

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3\left[x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y)\right] + bxyz = 1$$

Cela veut dire que $bxyz < t3\left[x^2(1-x) + y^2(1-y) + z^2(1-z)\right]$, et puis, comme il a été prouvé que

$$bxyz < x^2(1-x) + y^2(1-y) + z^2(1-z),$$

en multipliant cette inégalité par 3, nous aurons

$$18xyz < 3\left[x^2 + (1-x)\,y^2(1-y) + z^2(1-z)\right],$$

ajoutons ces inégalités, nous aurons $24xyz < 1$, où $xyz < \frac{1}{24}$.

J'ai dit que l'inégalité (α) est facile à démontrer

$$x^2 + y^2 > 2xy\,; \quad x^2 + z^2 > 2yz\,; \quad z^2 + x^2 > 2zx,$$

ajoutons ces inégalités, nous aurons en simplifiant

$$x^2 + y^2 + z^2 > xy + yz + zx.$$

Multiplions cette inégalité par $x + y + z$, nous aurons en simplifiant

$$x^3 + y^3 + z^3 > 3xyz.$$

Plakhowo.

Solutions exactes : MM. **L'Huillier, Alfredo Schiapper (Monteïro)**.

Dans tout triangle on a $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$; et quand l'égalité a lieu le triangle est équilatéral.

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\,\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc},$$

ou $$= \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{8abc},$$

et nous avons démontré que $abc > (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$, cela veut dire que $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2} < \frac{1}{8}$, et si le triangle est équilatéral, $a = b = c$. Alors le numérateur devient égal au dénominateur et

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8}.$$

Plakhowo.

QUESTION 730

Solution, par **Svéchnicoff**

Rendre rationnelle l'équation

$$\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^4 - \left(a^2x^{\frac{2}{3}} + b^2y^{\frac{2}{3}}\right) = 0.$$

E.-N. Barisien.

On trouve successivement

$$x^{\frac{8}{3}} + 4y^{\frac{2}{3}}x^2 + by^{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}} + 4y^2x^{\frac{2}{3}} + y^3 - a^2x^{\frac{2}{3}} - b^2y^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$x^{\frac{2}{3}}(x^2 + 4y^2 - a^2) + y^{\frac{2}{3}}(4x^2 + y^2 - b^2) = -by^{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}},$$

$$x^2(x^2 + 4y^2 - a^2)^3 + y^2(4x^2 + y^2 - b^2)^3 - 18y^2x^2(x^2 + 4y^2 - a^2)(4x^2 + y^2 - b^2)$$
$$= -216y^4x^4.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 742

Soit donné un triangle ABC *et soient* A_1, B_1, C_1, *les points où les médianes coupent le cercle circonscrit au triangle* ABC. *Si* S *et* S_1 *représentent les surfaces des triangles homologiques* ABC *et* A, B, C, *on a la relation*
$$\frac{S_1}{S} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^3}{\left[2(b^2 + c^2) - a^2\right]\left[2(a^2 + c^2) - b^2\right]\left[2(a^2 + b^2) - c^2\right]}.$$

Jorge F. d'Avillez.

Soient M le point de rencontre des médianes du triangle ABC : A′, B′, C′ les pieds des médianes ; m_a, m_b, m_c, les longueurs des médianes AA′, BB′, CC′. On sait que

$$(1)\quad m_a^2 = \frac{2(b' + c^2) - a^2}{4},\quad m_b^2 = \frac{2(a' + c') - b^2}{4},\quad m_c^2 = \frac{2(a' + b') - c^2}{4},$$

Le triangle MAB et MA_1B_1 sont semblables. On a donc pour le rapport de leurs surfaces

$$(2)\qquad \frac{MA_1B_1}{MAB} = \frac{\overline{MA_1}^2}{\overline{MB}^2} = \frac{(MA' + A_1A')^2}{\overline{MB}^2} = \frac{\left(\frac{1}{3}m_a + A_1A'\right)^2}{\overline{MB}^2}.$$

Or, $\qquad A_1A' + AA' = CA' + A'B, \quad A_1A' + ma = \frac{a^2}{4}.$

Donc $A_1A' = \frac{4m_a}{a^2}$, et comme $MB = \frac{2}{3}m_b$, l'expression (2) devient

$$\frac{MA_1B_1}{MAB} = \frac{9(4m_a^2 + 3a^2)^2}{576m_a^2m_b^2}.$$

Mais, d'après (1) $\quad 4m_a^2 + 3a^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2).$

Donc
$$\frac{MA_1B_1}{MAB} = \frac{9(a^2 + b^2 + c^2)^2}{144m_a^2m_b^2}.$$

Or,
$$MAB = \frac{2}{3}AA''B = \frac{S}{3};$$

par conséquent,

$$(3)\qquad MA_1B_1 = \frac{3S(a' + b' + c')^2}{144m_a^2m_b^2}.$$

En faisant la somme des trois aires MA_1B_1, MA_1C_1 et MB_1C_1, on a

$$S_1 = \frac{3S(a'+b'+c')^2}{144}\left[\frac{1}{m_a^2m_b^2} + \frac{1}{m_a^2m_c^2} + \frac{1}{m_b^2m_c^2}\right] \frac{3S(a^2+b^2+c^2)^2(m_a^2+m_b^2+m_c^2)}{144m_a^2m_b^2m_c^2}.$$

En remplaçant m_a, m_b, m_c par les valeurs (1), on trouve l'expression proposée.

Remarque. — On trouve aussi que

$$\frac{\overline{A_1B_1}^2}{\overline{AB}^2}+\frac{\overline{A_1C_1}^2}{\overline{AC}^2}+\frac{\overline{B_1C_1}^2}{\overline{BC}^2}=\frac{3S_1}{S}.$$

(E.-N. Barisien).

Solutions exactes : MM. **Ernest Foucart, Francis Dauzats, L'Huillier.**

QUESTION 743

Solution, par **Ernest Foucart**

L'inverse de la longueur commune des demi-droites, issues du point de Jérabek d'un triangle, est égale à la somme des inverses des côtés du triangle. **(Jorge F. d'Avillez).**

Les coordonnées du point de Jérabek sont

$$x=\frac{2S}{a}\frac{a(b+c)-bc}{bc+ca+ab},$$

$$y=\frac{2S}{b}\frac{b(c+a)-ca}{bc+ca+ab},$$

$$z=\frac{2S}{c}\frac{c(a+b)-ab}{bc+ca+ab}.$$

La longueur de la demi-droite issue du point d'abcisse x étant donnée par la formule

$$\frac{1}{l}=\frac{4S}{a(2S-ax)},$$

on a pour la demi-droite issue du point de Jérabek

$$\frac{1}{L}=\frac{4S}{a\left(2S-2S\,\dfrac{a(b+c)-bc}{bc+ca+ab}\right)}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Solution exacte : **Francis Dauzats.**

SOLUTION DE LA QUESTION 756

Par **Jorge F. d'Avillez**

ABC *est un triangle isoscèle. On abaisse sur la base la perpendiculaire* AH. *Sur cette droite, on a le centre* O *du cercle inscrit au triangle* ABC *et le point* D *où elle rencontre le cercle circonscrit à* ABC.

Démontrer que si AO *est double de* HD *le triangle* ABC *est équilatéral.*

Mannheim.

SOLUTION

Si AO = 2HD, on a, en substituant les valeurs connues

$$b\sqrt{\frac{p-a}{p}}=4R-2h_a.$$

R étant le rayon du cercle circonscrit et h_a la hauteur AH.

On a encore

$$b\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}=\frac{ab^2}{S}-\frac{4S}{a}=\frac{a^2b^2-4S^2}{aS},$$

donc, comme l'on a $$S = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}$$

il vient $$b\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}} = \frac{a^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}},$$

et $$b^2(2b - a) = \frac{a^4}{2b - a}.$$

On a donc l'égalité

$$4b^4 - 4ab^3 + a^2b^2 = a^4,$$

laquelle est vérifiée par $b = a$; donc, le triangle est équilatéral..

Jorge F. d'Avillez.

Solutions exactes : MM. **Jeunet, Plakhowo, Brand, A. Droz-Farny, Goyens.**

QUESTIONS PROPOSÉES

L'aire du triangle ayant pour sommets les projections du centre de gravité sur les côtés est égale à $\frac{4S^3(a^2 + b^2 + c^2)}{9a^2b^2c^2}$, a, b, c et S désignant les côtés et l'aire du triangle donné.

(**E.-N. Barisien**).

Soient : A', B', C' les pieds des bissectrices intérieures du triangle ABC ; O le point de concours de ces bissectrices ; A", B", C" les milieux de AA', BB', CC' ; S et $2p$ la surface et le périmètre du triangle ABC ; Σ la surface du triangle A"B"C". Démontrer les relations

$$\Sigma = \frac{AA'.BB'.CC'}{16p} = \frac{p^3}{2S^2} \cdot OA''.OB''.OC'',$$

(**E.-N. Barisien**).

Soient : A', B', C' les pieds des bissectrices intérieures d'un triangle ABC ; O leur point de concours ; A", B", C" les milieux des bissectrices AA', BB', CC' ; p, r, R, le demi-périmètre, le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, S' l'aire du triangle A'B'C'. Démontrer les relations $$AA'.BB'.CC' = 4p.S',$$

$$OA.OA'.OA''.OB.OB'.OB''.OC.OC'.OC'' = \frac{4R^2r^2S'^2}{p^2} = \frac{4R^2S'^2}{S^2}.$$

(**E.-N. Barisien**).

Soient : S le centre des symédianes d'un triangle ABC ; A', B', C' les projections du point S sur les côtés BC, CA, AB. Montrer que les trois triangles OB'C', OC'A', OA'B' sont équivalents. (**E.-N. Barisien**).

Le Directeur-gérant,

GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER), IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^T-CYR

249. Mathématiques. — On donne une parabole de sommet S, de foyer F. Sur l'axe on prend un point E tel que FE soit égal aux deux tiers de FS. Au point O tel que FO = FE (O entre F et S) on élève la perpendiculaire à l'axe. On joint le point E au point mobile μ parcourant cette perpendiculaire. La droite qui joint D et μ (D, intersection de l'axe et de la directrice) rencontre la parabole en ν. On joint O et ν qui rencontre $E\mu$ en M. Lieu du point M quand le point μ décrit la perpendiculaire élevée en O à l'axe de la parabole. **Léopold Massip.**

249 bis. — On donne un demi-cercle de diamètre AB. On trace une corde variable CD parallèle à AB. On projette C en E sur AB. On joint E, D. Du point B on abaisse la perpendiculaire BI sur ED. On prend le milieu M de BI et on tire EM. Déterminer la position de CD telle que le triangle EBI soit maximum. Déterminer la position de CD telle que EM soit perpendiculaire à BI.

250. — Décrire au milieu de la feuille une circonférence de centre S et de R = 7 centimètres et mener dans cette circonférence 3 rayons faisant entre eux consécutivement des angles de 120°.

Le point S et les extrémités *a*, *b*, *c*, des rayons ont respectivement pour côtés :

$S = 12^{cm},25$; $a = 2^{cm},50$; $b = 4^{cm},25$; $c = 1^{cm},75$.

Ces 3 droites SA, SB, SC déterminent un trièdre dont on demande de trouver les 6 éléments.

2° Le trièdre et le PH forment un tétraèdre que l'on construit et on demande de déterminer la sphère inscrite dans le tétraèdre, ainsi que la plus courte distance de deux droites opposées.

3° On mène dans l'intérieur de ce tétraèdre un plan N à chaque face et à une distance de cette face = 8 centimètres, on enlève les petites pyramides ainsi détachées par chacun des plans et on demande de représenter le solide restant.

La sphère inscrite sera tracée en rouge.

250 bis. Calcul trigonométrique. — Résoudre un triangle connaissant :

$$h = 122^{m},75, \quad a = 1825^{m},45, \quad A = 28^{\circ}31'40''5.$$

250 ter. Questions d'oral. — Démontrer que la surface d'un trapèze est égale au produit de l'un des côtés non parallèles par la distance à ce côté du milieu du côté opposé.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

251. Mathématiques. — I. Résoudre un triangle rectangle en A connaissant le périmètre $2p$ et l'angle B au moyen de formules calculables par logarithmes.

Cas particulier $B = 60^{\circ}$.

251 bis. — Résoudre l'équation :

$$\cos 2x + 4(2m - 5)\cos x + 3 = 0$$

et discuter en faisant varier m.

251 ter. — III. Maximum et minimum de : $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}$.

252. Calcul logarithmique. — Calculer

$$x = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\pi + 231\,478 + 75\,781}}}}{2,4789 - 1,665 + 1825}.$$

253. Physique. — Un tube recourbé ABCDE se termine par deux branches verticales cylindriques AB et DE et dont les diamètres ont respectivement 6 centimètres et 1 centimètre. On verse du mercure dans le tube jusqu'à ce que le niveau M dans la branche DE soit à 30 centimètres de l'extrémité E, puis on achève de remplir le tube DE avec de l'eau. On demande de déterminer quelle sera alors la position de la surface de séparation du mercure et de l'eau dans le tube DE. On place ensuite dans le tube AB un cylindre du poids de 4 kilogrammes reposant sur la surface du mercure et faisant fonction de piston. On demande de déterminer la nouvelle position de la surface de séparation de l'eau et du mercure dans le tube DE.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

254. Mathématiques. — On donne un demi-cercle ACB, de rayon R ; sur la tangente AT perpendiculaire au diamètre AB, on porte AM tel que $AM = x$, puis, du point M, on mène la tangente MC. On demande :

1° De calculer en fonction de R et de x les distances du point C au diamètre et à la tangente ;

2° De déterminer x de manière que la somme de ces deux distances soit égale à une longueur donnée m, telle que $CD + AD = m$. — Discussion.

Au choix) : Mesure du temps ; jour solaire vrai ; jour solaire moyen.

2e *Sujet* : Lois de Kepler ; inégalité des saisons.

3e *Sujet* : Détermination de la longitude et de la latitude.

255. Physique. — Etant donné un aéromètre de Beaumé pour liquides plus denses que l'eau, on constate que si on vient à en augmenter le poids de 2 grammes en introduisant de la grenaille de plomb à son intérieur, il s'enfonce dans l'eau pure jusqu'à la division 15 de la tige.

Sachant qu'une dissolution de sel marin contenant 85 parties d'eau et 12 parties de sel a une densité de 1,114, on demande quels sont pour cet aéromètre : son volume jusqu'au zéro de la tige : le volume d'une division ; son poids initial.

Au choix) : 1er *Sujet* : Microscope.

2e *Sujet* : Lunette astronomique.

3e *Sujet* : Lunette de Galilée.

Dans ces trois sujets, il faudra construire les images, indiquer la marche des rayons, définir et mesurer la puissance.

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES — SCIENCES)

256. Mathématiques. — Deux barres homogènes, de mêmes matières et de mêmes dimensions transversales AB, CD, peuvent tourner librement en leurs extrémités A et C autour de deux charnières horizontales I et J qui traversent une tige AC.

On sait que ce système pesant est en équilibre dans un même

plan vertical lorsque les barres AB, CD horizontales sont réunies par la tige AC verticale et par un fil F′ vertical et que la barre AB est supportée par un fil F dont la droite prolonge celle du fil F′. en rasant l'extrémité B de la barre AB.

On regarde le poids de la tige AC comme négligeable, et on demande de calculer :

1° Le rapport $\frac{CD}{AB}$ de la longueur des deux barres ;

2° La tension du fil F, la tension du fil F′ et la compression de la tige AC estimées en prenant comme unité de force le poids de la barre AB.

Au choix. a) Construire les intersections d'une droite donnée par ses projections et d'une sphère donnée par son rayon et par les projections de son centre.

b) Construire l'angle de deux plans donnés par leurs traces.

c) Construire l'angle de deux droites données par leurs projections.

257. Physique. — Entre deux conducteurs A, B supposés sans résistance sont disposés 3 groupes de 2 lampes à incandescence dont la résistance individuelle est de $1^{ohm},5$. Ces conducteurs sont reliés aux deux pôles d'une batterie de 4 éléments de pile dont la force électromotrice et la résistance individuelles sont respectivement $1^{volt},8$ et $0^{ohm},5$. Parmi les 3 arrangements rationnels de ces 4 éléments, en existe-t-il qui détermineront un courant plus intense ? Quelle sera alors la quantité de chaleur rayonnée par seconde dans chaque lampe ?

Au choix) 1er *Sujet* : Capacité électrique mesure, au moyen de l'électromètre de la capacité d'un condensateur.

2e *Sujet* : Effets calorifiques des courants. — Loi de Joule.

3e *Sujet* : Eclairage électrique.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

258. Arithmétique. — Deux robinets A et B sont ajustés à un réservoir. On ouvre A, on laisse couler le quart du liquide ; puis on ouvre B, et le réservoir achève de se vider par les deux robinets en 1 heure 1/4.

Si on avait d'abord laisser couler B pendant une demi-heure et

ensuite ouvert le robinet A, le réservoir aurait achevé de s'épuiser en 1 heure $\frac{1}{7}$, par les deux robinets.

Quel temps faudra-t-il à chaque robinet, coulant seul, pour mettre le réservoir à sec.

258 bis. — Calculer $x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{75\,280}{\sqrt[5]{6\,543}}}}$.

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

259. Arithmétique. — Une personne avait placé une somme à 5 %. Elle l'a retirée au bout d'un an et du capital réuni aux intérêts elle a fait deux parts. Le tiers est employé à acheter de la rente 4,5 % au cours de 110, ce qui donne un intérêt annuel de 350 francs. Les deux tiers qui restent sont placés en rente 3 % et donnent 603 francs d'intérêt par an. On demande quelle somme cette personne avait d'abord placée et quel est le cours du 3 %.

259 bis. Algèbre. — Résoudre :

$$\log x + \log y = 2$$
$$x^2 - 7y^2 = 513.$$

259 ter. Calcul logarithmique (voir **258 bis**).

DEUXIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

Sur la polaire d'un point par rapport à une conique, par A. Tissot. Librairie *Ch. Delagrave*, 15, rue Soufflot.

Les lecteurs de ce Journal se souviennent de l'étude qui fut insérée, *sur la polaire d'un point par rapport à une conique.* Cette étude avait pour but, principalement, de démontrer géométriquement des propriétés déjà connues sans doute, mais dont, la démonstration, véritablement élémentaire, n'avait pas encore été donnée ; en second lieu, d'établir quelques nouvelles propriétés. On se souvient quelle ingéniosité et quelle élégance M. Tissot a rencontrées dans son travail. Ce travail n'est évidemment pas classique et avant sa publication dans le *Journal de Mathématiques,* peu d'élèves avaient des notions exactes sur le *nœud* et le *saillant* ; mais il montre que fort heureusement pour notre pays et son enseignement, il y a encore des hommes qui aiment *la Mathéma-*

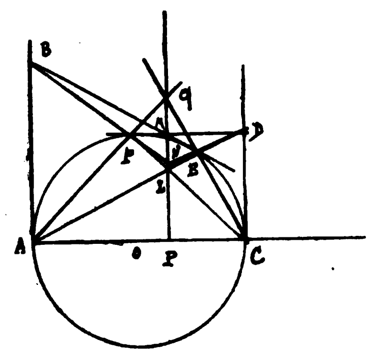
tique (comme diraient *Pascal* et M. *Laisant*) pour la Mathématique elle-même. M. Tissot est un de ceux-là. Il est bon qu'en dehors des heures d'enseignement, des professeurs, sans se préoccuper de l'esprit étroit de programmes, trop souvent mal faits, cherchent des méthodes, des idées nouvelles, dont eux ou leurs collègues meubleront l'esprit de leurs élèves. C'est cette recherche, quelquefois longue et toujours patiente, qui a permis, chez nous, d'élever le niveau des études scientifiques ; c'est le travail personnel de nos maîtres qui a soutenu la réputation de nos grandes écoles ; mais pour cela il faut des qualités intellectuelles d'un ordre supérieur, et la patience dans les recherches mathématiques ne suffit pas, c'est là surtout malgré, l'autorité de Buffon, que le *génie* n'est pas qu'une *longue patience*. A l'imagination, à l'initiative, à la hauteur de vues, à la déduction prompte et rapide, que doivent posséder tous les véritables mathématiciens, il faut joindre encore les qualités nécessaires pour coordonner tous ces faits, toutes ces vérités, pour les présenter sous leur vrai jour, à de jeunes cerveaux encore peu habitués à ces raisonnements, pour les *enseigner* enfin.

M Tissot possède à un haut degré toutes les qualités, et bien d'autres encore, que nous venons de signaler. Aussi engageons-nous les lecteurs de ce journal à relire attentivement le travail de ce maître ; ils y gagneront d'y voir leur esprit se développer, ainsi que la puissance de leur raisonnement.

G. M.

SOLUTION DE LA QUESTION 155

Aux extrémités du diamètre AC *d'un cercle* O, *on mène les tangentes* AB = v *et* CD = u, *et des points* B *et* D, *les autres tangentes* BE *et* DF *qui se coupent en* M ; *on tire ensuite les couplés de droites* DE, BF ; CE, AF ; AE, CF, *qui se coupent respectivement en* N, Q *et* L.



Démontrer que les points M, N, Q *et* L *sont sur la polaire du point* I *de rencontre de* BD *avec* AC, *et que la droite* FE *passe par ce point.*

Déterminer les lieux décrits par les points M, N, Q *et* L *lorsque :*

$$\frac{AB}{CD} \quad \text{ou} \quad AB \times CD$$

ou AB ± CD sont constants.

1° On a $\frac{AI}{CI} = \frac{OI + R}{OI - R} = \frac{v}{u}$ d'où $OI = R\,\frac{v+u}{v-u}$.

P étant le pied de la polaire de I, on sait que OP.OI = R^2, et par suite,

$$OP = R\,\frac{v-u}{v+u}.$$

Soient 2α et 2β les angles CDF et ABE ; les triangles rectangles OCD et

OAB donneront :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{u} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{R}{v} \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2Ru}{u^2 - R^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{2Rv}{v^2 - R^2}.$$

Les coordonnées rectangulaires de E (x', y') et de F(x'', y'') par rapport à OI comme axe des x et à l'origine O sont donc :

$$\begin{cases} x' = R\cos 2\beta = R\dfrac{v^2 - R^2}{v^2 + R^2} \\ y' = R\sin 2\beta = \dfrac{2R^2v}{v^2 + R^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = -R\cos 2\alpha = -R\dfrac{u^2 - R^2}{u^2 + R^2} \\ y'' = R\sin 2\alpha = \dfrac{2R^2u}{u^2 + R^2} \end{cases}$$

A l'aide de ces coordonnées, il est facile de vérifier que les quatre points M, N, Q et L sont sur la polaire $x = R\dfrac{v - u}{v + u}$ et que les coordonnées de ces points sont :

$$(1)\quad MP = \frac{uv + R^2}{v + u} \quad NP = \frac{uv(3R^2 - uv)}{R^2(u + v)} \quad QP = \frac{2vu}{v + u} \quad LP = \frac{2R^2}{v + u}.$$

Incidemment, on voit que M est le milieu de QL et centre du cercle circonscrit au quadrilatère QFLE.

Observation. — Si u et v sont de sens contraires, le pôle I devient intérieur, et la polaire, extérieure.

2° Lieux géométriques. — *Première condition* : $\dfrac{v}{u} = m$.

Puisque $\dfrac{v}{u}$ est constant, BD coupe AC en un point fixe I, et comme OP est aussi constant, les points M, N, Q et L parcourent la polaire de ce point.

Deuxième condition : $-uv = m^2$.

Les équations des lieux géométriques cherchés résulteront de l'élimination des variables u et v entre

$$x = \frac{R(v - u)}{v + u} \qquad uv = m^2,$$

et l'expression (1) de l'ordonnée correspondante. On trouvera ainsi pour

(M) l'ellipse $4m^2R^2y^2 + (m^2 + R^2)^2x^2 = R^2(m^2 + R^2)^2$,

(N) l'ellipse $4R^6y^2 + m^2(3R^2 - m^2)^2x^2 = m^2R^2(3R^2 - m^2)^2$,

(Q) l'ellipse $R^2y^2 + m^2x^2 = m^2R^2$,

(L) l'ellipse $m^2y^2 + R^2x^2 = R^4$.

Troisième condition : $v + u = m$. — On éliminera u et v entre :

$$x = \frac{R(v - u)}{v + u} \qquad v + u = m,$$

et l'une des équations (1), ce qui donnera pour :

(M) la parabole $4R^2my = 4R^4 + m^2(R^2 - x^2)$,

(N) le lieu $16R^6y = m(R^2 - x^2)\left[12R^4 - m^2(R^2 - x^2)\right]$,

(Q) la parabole $2R^2y = m(R^2 - x^2)$,

(L) la parallèle à OI $y = \dfrac{2R^2}{m}$.

Quatrième condition : $v - u = m$. — On éliminera u et v entre :

$$x = \frac{R(v - u)}{v + u} \qquad v - u = m,$$

et l'une des équations (1), ce qui conduira pour :

(M) à l'hyperbole $4Rmxy + (m^2 - 4R^2)x^2 = m^2R^2$

(N) au lieu $16R^3x^3y = m(R^2 - x^2)\left[12R^2x^2 - m^2(R^2 - x^2)\right]$,

(Q) à l'hyperbole $2Rxy + mx^2 = mR^2$,

(L) à la droite $y = \frac{2R}{m}x$.

H. Lecocq.

SOLUTION DE LA QUESTION 236

Dans un cercle de rayon R, *placer trois cordes de longueurs données* α, β, γ *de manière à ce que le triangle formé par leurs intersections soit semblable à un triangle donné ayant* $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, *pour angles. Expression des côtés, de la surface et du rayon du cercle circonscrit. Cas particulier du triangle équilatéral.*

Posons $m = \sqrt{R^2 - \frac{\alpha^2}{4}}$ $n = \sqrt{R^2 - \frac{\beta^2}{4}}$ $p = \sqrt{R^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

m, n, p étant les distances du centre O aux cordes données.

Décrivons de ce point trois circonférences concentriques de rayons m, n et p. Menons une tangente quelconque BC à la première, et aux deux autres des tangentes faisant avec cette droite des angles donnés $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$, on obtiendra ainsi un triangle ABC répondant à la question.

Soient H, K, L les trois points de contact des côtés BC, AC, AB, on aura, par projections :

$$AK = AL \cos A + p \sin A$$
$$AL = AK \cos A + n \sin A$$

d'où

$$AK = \frac{p + n \cos A}{\sin A} \quad AL = \frac{n + p \cos A}{\sin A},$$

on trouverait de même les expressions de BL, BH et de CH, CK d'où, pour les trois côtés a, b, c du triangle ABC, en posant :

$$m \sin A + n \sin B + p \sin C = Q$$

$$a = \frac{Q}{\sin B \sin C} \quad b = \frac{Q}{\sin A \sin C} \quad c = \frac{Q}{\sin A \sin B},$$

$$S = \frac{Q^2}{2 \sin A \sin B \sin C} \quad R = \frac{Q}{2 \sin A \sin B \sin C}.$$

Si le triangle est équilatéral, on a :

$$a = b = c = \frac{2(m + n + p)\sqrt{3}}{3},$$

$$S = \frac{(m + n + p)^2\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad R = \frac{2(m + n + p)}{3}.$$

H. Lecocq.

SOLUTION DE LA QUESTION 237

Déterminer, dans le plan d'un triangle ABC, *un point* O *tel que, pour les trois triangles* OAB, OAC, OBC, *le produit des trois côtés soit le même.*

On supposera, dans la figure, $a > b > c$.

Il faut donc que :

$$a \times OB \times OC = b \times OC \times OA = c \times OA \times OB$$

d'où
$$\frac{OA}{a} = \frac{OB}{b} = \frac{OC}{c}.$$

Soient D et D' les points de partage de BC en raison inverse de AC et AB; le point O sera sur la circonférence de diamètre DD', et son centre I peut être déterminé par les rapports :

$$\frac{DB}{b} = \frac{DC}{c} = \frac{a}{b+c} \qquad \frac{D'B}{b} = \frac{D'C}{c} = \frac{a}{b-c},$$

d'où
$$\frac{IC}{IB} = \frac{c^2}{b} \quad \text{et} \quad ID = \frac{abc}{b^2 - c^2}.$$

Pareillement, on trouvera sur AC et AB les centres H et K de deux autres cercles, de rayons $\frac{abc}{a^2 - c^2}$ et $\frac{abc}{a^2 - b^2}$ sur lesquels se trouvera encore le point O.

Il y a deux solutions symétriques par rapport à la droite IHK.

Etant donné un triangle ABC, *le point* O *symétrique du point de concours* I *des trois hauteurs par rapport au centre du cercle circonscrit est tel que, pour les trois triangles* OAB, OAC, OBC, *la somme des carrés des trois côtés est la même.*

En effet, abaissons OP et IQ perpendiculaires sur AC, on aura :

$$AP = CQ \quad \text{et} \quad AQ = CP.$$

D'autre part :

$$\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2 = \overline{PA}^2 - \overline{PC}^2 = \overline{CQ}^2 - \overline{AQ}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{AB}^2$$

d'où
$$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CB}^2$$

et, par suite
$$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{OB}^2$$

H. Lecocq.

TROISIÈME PARTIE

QUESTION 760

Solution, par **Ernest Foucart**

Etant donné un cercle C, *de rayon* R, *d'un point* A *de la circonférence comme centre on décrit un cercle* C' *de rayon* R' *qui rencontre* C *en* P *et* P', *et un cercle* C'' *de rayon* R'' *qui rencontre* C *en* Q *et* Q'. *Calculer les aires des triangles* APQ *et* APQ' *en fonction de* R, R', R''.

E. N. Barisien.

Nous supposons R'' > R'. Le théorème de Ptolémée donne

$$2R.PQ = R''\sqrt{4R^2 - R'^2} - R'\sqrt{4R^2 - R''^2},$$

Or
$$S.APQ = \frac{R'.R''.PQ}{4R} = \frac{R''\sqrt{4R^2 - R'^2} - R'\sqrt{4R^2 - R''^2}}{8R^2}.$$

De même

$$S.APQ' = \frac{R'.R''.PQ'}{4R} = \frac{R''\sqrt{4R^2 - R'^2} + R'\sqrt{4R^2 - R''^2}}{8R^2}.$$

Solutions exactes : MM. **Francis Dauzats, L'Huillier, Goyens, Plakhowo.**

QUESTION 762

762. — *Un angle droit* xOy *est coupé par deux droites parallèles* AA' *et* BB'. (A, B *sont sur* Ox ; A', B' *sur* Oy). *La perpendiculaire abaissée de* O *sur la direction des parallèles considérées rencontre :* AA' *en* P ; BB' *en* Q ; *on suppose* B'Q = AO.

Démontrer que si l'on prend, sur Ox, OH = QB, *on a*

$$\text{tg HA'O} = \text{tg}^3\text{AA'O}.$$ **E.-N. Barisien.**

$$\text{OH} = \text{A'O tg HA'O}; \quad \text{AO} = \text{A'O tg AA'O}.$$

Multiplions ces égalités membre à membre, nous aurons

$$\text{AO.OH} = \text{A'O}^2\text{tg HA'O. tg AA'O},$$

d'où

$$\text{tg HA'O} = \frac{\text{AO.OH}}{\text{A'O}^2\text{tg A'O}}.$$

Mais comme OB' = A'O et OB = HO, cela veut dire que

$$\text{OQ}^2 = \text{BQ.OB'} = \text{A'O.AH}; \quad \text{QO} = \text{QB'. tg AA'O},$$

et

$$\text{QO}^2 = \text{QB'}^2\text{tg}^2\text{AA'O},$$

et alors nous aurons

$$\text{tg HA'O} = \frac{\text{AO}^2\text{.tg AA'O}}{\text{A'O}^2},$$

$$\frac{\text{A'O}}{\text{AO}} = \text{tang AA'O}; \quad \text{tg HA'O} = \text{tg}^3\text{AA'O},$$

ce qu'il fallait démontrer. **N. Plakhowo.**

Solutions exactes : MM. **Ernest Foucart, Francis Dauzats, A. Droz-Farny, Svecknicoff, L. Goyens, L'Huillier.**

SOLUTION DE LA QUESTION 763

Le centre du cercle orthogonal aux trois cercles exinscrits à un triangle F *est distant du centre du cercle des neuf points du même triangle* F *de la longueur* $\frac{1}{2}\sqrt{R(R - 2r}$. **(E.-N. Barisien).**

On sait que le cercle circonscrit au triangle anticomplémentaire de F est orthogonal aux trois cercles exinscrits ; il a pour centre l'orthocentre H de F. La distance de l'orthocentre de F au centre O du cercle circonscrit au même triangle est donnée par la relation connue

$$\text{OH} = \sqrt{R(R - 2r)}.$$

Le centre ω du cercle des neuf points étant le milieu de la droite OH, on a la distance cherchée

$$\omega H = \frac{1}{2}\sqrt{R(R - 2r)}.$$

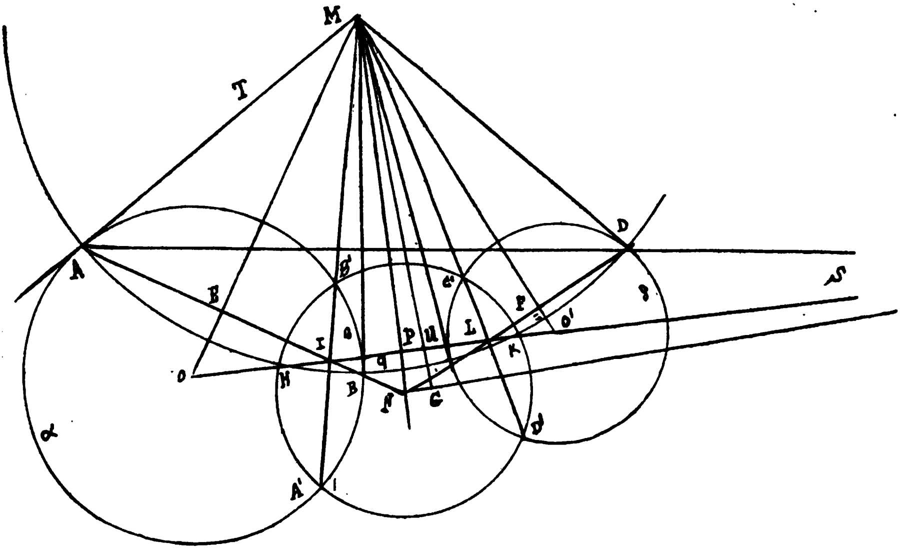
(Jorge F. d'Avillez.

Solutions exactes : **L'Huillier, A. Droz-Farny, Francis Dauzats.**

Si d'un point quelconque M *de l'axe radical de deux cercles* O *et* O', *on mène les quatre tangentes égales* MA, MB, MC, MD, *le point de rencontre des diagonales du quadrilatère inscrit* ABCD *coïncide, quel que soit le point* M *avec le centre* U *d'homothétie interne* (*si* O *et* O' *sont extérieurs l'un à l'autre*), *ou externe* (*si* O *et* O' *sont intérieurs l'un à l'autre*).

Soient O et O' extérieurs l'un à l'autre.

Remarquons d'abord que les côtés AD et BC passent par le centre d'homothétie externe S de O et de O'; car A et D d'une part, ou B et C d'autre



part, sont les points de contact de cercles tangents à O et O' intérieurement ou extérieurement, à cause des triangles isocèles AMD et BMC.

Les côtés AB et CD passent par les deux points fixes I et L qui sont, pour O et O' les pôles de l'axe radical; leur point de rencontre N appartient au même axe, puisque :

$$NA \times NB = ND \times NC.$$

Soient Q le milieu de $OO' = 2d$; R et R' les rayons de O et O'; T l'expression commune des tangentes menées de M; *t*, celle des tangentes menées de N et θ, celle des tangentes menées de P : posons $MP = m$, $NP = n$. On a d'abord :

$$\overline{PO}^2 - \overline{PO'}^2 = OO' \times 2PQ = 4d \times PQ = R^2 - R'^2.$$

d'où
$$PQ = \frac{R^2 - R'^2}{4d}$$

d'ailleurs :

$$OI = \frac{R^2}{PO} \qquad O'L = \frac{R'^2}{O'P} \qquad \theta^2 = PI \times PO = PL \times PO'.$$

D'un autre côté, des triangles semblables MPO et NPI, on déduit :

$$\frac{m}{\mathrm{PI}} = \frac{\mathrm{PO}}{n} \qquad \text{d'où} \qquad mn = \mathrm{PI} \times \mathrm{PO} = \theta^2.$$

Il en résulte :

$$\mathrm{T}^2 = \mathrm{ME} \times \mathrm{MO} = \mathrm{MP} \times \mathrm{MN} = m(m+n) = m^2 + \theta^2$$

$$t^2 = \mathrm{NA} \times \mathrm{NB} = \overline{\mathrm{NO}}^2 - \mathrm{R}^2 = n^2 + \overline{\mathrm{PO}}^2 - \mathrm{R} = n^2 + \theta^2 = $$
$$= n(m+n) = \mathrm{NP} \times \mathrm{NM}.$$

Si donc on prend PH = PK = θ, les deux circonférences de centres M, N et de rayons T, t passent par les deux points fixes H et K et sont orthogonales.

Du centre M du cercle circonscrit au quadrilatère ABCD, abaissons MG perpendiculaire à la troisième diagonale NS qui est la polaire du point de rencontre des diagonales intérieures. Soit U l'intersection de MG avec OO′ ; on a :

$$\mathrm{MU} \times \mathrm{MG} = \mathrm{MP} \times \mathrm{MN} = \mathrm{T}^2$$

donc U est le point de rencontre des diagonales.

Or, je dis que U est aussi le centre d'homothétie interne de O et O′ ; en effet, on a, par la similitude de PUM et NPS :

$$\frac{\mathrm{PU}}{m} = \frac{n}{\mathrm{PS}} \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{PU} = \frac{\theta^2}{\mathrm{PS}}$$

et, si l'on désigne par α, β, γ, δ les intersections de O et O′ par la ligne des centres, on aura, en partant de :

$$\theta^2 = (d + \mathrm{PQ})^2 - \mathrm{R}^2$$

$$\theta^2 = \frac{\alpha\delta \times \beta\gamma \times \alpha\gamma \times \beta\delta}{16d^2} \qquad \mathrm{PS} = \frac{(\mathrm{R}+\mathrm{R}')\,\alpha\gamma \times \beta\delta}{4d(\mathrm{R}-\mathrm{R}')}$$

avec les données ci-dessus, et en se servant de :

$$\frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{O'S}}{\mathrm{R}'} = \frac{2d}{\mathrm{R}-\mathrm{R}'}$$

on vérifiera facilement que

$$\frac{\mathrm{UO}}{\mathrm{UO}'} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}.$$

H. Lecocq.

Dans tout hexagone inscrit, les points de rencontre de chacun des côtés non consécutifs avec la diagonale qui joint les extrémités des côtés contigus, sont trois points en ligne droite.

Dans tout hexagone circonscrit, les droites qui joignent chacun des trois sommets non consécutifs au point de rencontre des côtés contigus à ceux qui les déterminent, se coupent en un même point.

Soit $O_1O_2O_3O_4O_5O_6$ un hexagone circonscrit au cercle O, de rayon R, et, dans le même ordre, S_1 (entre O_1 et O_2), $S_2S_3S_4S_5S_6$ les points de contact, sommets de l'hexagone inscrit dans le même cercle.

Des sommets $O_1O_3O_5$ comme centres, avec O_1S_1, O_3S_3, O_5S_5 comme rayons, décrivons trois cercles dont les centres de similitude externe M(O_1 et O_3), N(O_3 et O_5), P(O_5 et O_1), sont en ligne droite, et qui ont pour centre radical le point O.

D'après le théorème précédent, les trois droites S_1S_2, S_6S_3 et O_1O_2 qui passe par le point de rencontre σ_2 des diagonales du quadrilatère $S_1S_2S_3S_6$ concourent au point M.

De même les trois droites S_3S_4, S_2S_5 et O_3O_5 qui passent par le point de rencontre σ_4 des diagonales du quadrilatère $S_3S_4S_5S_2$ concourent au point N.

Et enfin les trois droites S_6S_5, S_1S_4 et O_1O_5 qui passe par le point de rencontre σ_6 des diagonales du quadrilatère $S_5S_6S_1S_4$ concourent au point P.

La propriété est donc démontrée.

D'autre part, puisque $\sigma_2\sigma_4\sigma_6$ sont les centres de similitude interne des couples de cercles O_1O_3, O_3O_5 et O_5O_1, il en résulte que les points

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_4,\ \sigma_6 \text{ et M} \\ \sigma_2,\ \sigma_6 \text{ et N} \\ \sigma_2,\ \sigma_4 \text{ et P}\end{array}\right\} \text{sont en ligne droite.}$$

Il en serait de même pour les cercles $O_2O_4O_6$ qui fournissent une autre droite (centres de similitude externe), et pour les centres de similitude interne $\sigma_2\sigma_3\sigma_5$ considérés deux à deux.

La seconde partie se déduit de la première par les propriétés des pôles et polaires réciproques.

Du théorème précédent on conclut encore que O_1O_3 passe par σ_2, O_2O_4 par σ_3..., etc.

Et que chacune des trois lignes O_1O_4, O_2O_5, O_3O_6 passe par un des sommets du triangle déterminé par les trois droites S_1S_4, S_2S_5 et S_3S_6.

Remarque. — Les résultats formulés dans ce même théorème permettent de passer facilement du théorème de Pascal à celui de Brianchon et réciproquement, au moyen des figures inverses. En effet, considérons les cercles O_1, O_4 de rayons O_1S_1 et O_4S_4 ; les cordes de contact S_3S_4 et S_1S_6 concourent en un point α' de leur axe radical ; soit α l'intersection de $O\alpha'$ avec O_1O_4, on a :

$$O\alpha \times O\alpha' = R^2.$$

Les points correspondants β, β' ; γ, γ' relatifs aux droites O_2O_5 et O_3O_6 donneront de même

$$O\beta \times O\beta' = R^2$$
$$O\gamma \times O\gamma' = R^2.$$

Ainsi les points α, β, γ ont pour inverses α', β', γ' ; si donc ces derniers sont en ligne droite (théorème de Pascal), les droites O_1O_4, O_2O_5 et O_3O_6 concourent en un même point (théorème de Brianchon), et réciproquement.

H. Lecocq.

REMARQUES

Concernant les formules fondamentales de la trigonométrie

par M. **Escary**, professeur au Lycée de Foix

I

Les formules de l'addition des arcs en trigonométrie, savoir :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l}\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a\end{array}\right.$$

peuvent être établies par trois méthodes qui, en apparence, sont différentes, mais qui, au fond, découlent des mêmes principes comme cela doit être et

comme il est facile de le démontrer. Dans la première méthode, fondée sur la similitude, c'est-à-dire sur l'interprétation arithmétique des constructions de la géométrie, on établit d'abord pour le premier quadrant que ces deux formules sont de véritables identités, ou des égalités de même espèce que

$$(2) \qquad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

où les deux membres conduisent à des valeurs numériques égales pour toutes les valeurs réelles de a et de b.

Ce point établi, on applique les résultats obtenus dans les variations des lignes trigonométriques à celles de ces lignes qui figurent dans les égalités (1). On sait d'ailleurs que ces variations sont uniquement déduites de l'arithmétique et des conventions relatives aux signes de la géométrie de Descartes. On constate ainsi successivement, non seulement que les égalités dont il s'agit subsistent, mais encore qu'elles conservent la même forme, quand la somme des arcs se termine au second, au troisième ou au quatrième quadrant, et cela, quelles que soient les valeurs des arcs a et b dont la somme est comprise entre O et 2π. Enfin, en ayant égard à la périodicité, on démontre, toujours au moyen des mêmes variations des lignes trigonométriques, que les premiers membres des égalités (1) donnent les mêmes résultats numériques que les seconds, lorsque a, b, et par suite leur somme, passent d'une manière continue par toute l'échelle des grandeurs ; en sorte que, ces deux égalités uniquement composées de fonctions transcendantes sont absolument analogues, ou plutôt de même espèce que l'égalité (2) exclusivement composée de quantités algébriques.

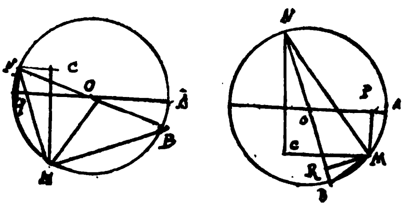
Telle est l'essence de la démonstration, due à Lagrange, si je ne me trompe, des formules fondamentales de la trigonométrie, qu'on trouve dans la plupart des traités écrits sur cette matière. On voit que cette solution a toute la généralité, ou toute l'étendue que la question comporte.

II

Les formules (1) qu'on peut déduire de la suivante :

$$(3) \qquad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

ont été établies par Cauchy, d'après Catalan, ou par Sarrus, d'après M. H. Fajon (*Journal de Vuibert*, 1892, p. 86), au moyen des mêmes principes et avec la même généralité, à l'aide d'une méthode dont l'exposition exige moins de détails et qui, par conséquent, conduit plus rapidement au but.



Soient les cercles O de rayons égaux à l'unité. ANM un arc égal à a, AN un arc égal à b, et par suite NM égal à $a - b$. Si l'on construit le sinus MP de l'arc a et le cosinus OR du même arc, le sinus NQ et le cosinus OQ de l'arc b, et enfin, le sinus MR et le cosinus OR de l'arc $a - b$, les deux triangles rectangles MNC et MNB

donnent, dans le premier cercle, l'égalité double suivante :

$$\overline{MN}^2 = (\sin a + \sin b)^2 + (\cos b - \cos a)^2 = 2\left[1 + \cos(a - b)\right]$$

et dans le second, la suivante :

$$\overline{MN}^2 = (\sin a + \sin b)^2 + (\cos a + \cos b)^2 = 2\left[1 + \cos(a - b)\right].$$

D'où l'on conclut dans les deux cas, et en ayant égard aux signes de MP, ou de sin a, de OP, ou de cos a, de OQ ou de cos b, de OR ou de cos $(a - b)$.

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

ce qui est précisément la formule (3).

La construction des triangles BMN et CMN, au moyen desquels la formule (3) a été établie, est toujours possible et reste la même quand les extrémités des arcs a et b se terminent à l'un quelconque des quatre quadrants. Il suffit donc pour achever d'établir sa généralité d'avoir égard à la périodicité.

Ces deux solutions ne diffèrent donc pas essentiellement l'une de l'autre, cependant, la seconde est plus élégante parce que la discussion réclamée par la considération successive des quatre quadrants, s'y trouve supprimée.

Elles emploient les mêmes éléments géométriques puisés aux mêmes sources, c'est-à-dire sans l'interprétation des constructions de la géométrie au moyen des opérations de l'arithmétique.

III

La méthode dite des projections est aujourd'hui la seule exigée par les programmes de l'enseignement secondaire en France pour établir les mêmes formules. Elle est considérée par les étudiants comme étant moins nette, moins limpide que les précédentes. Il nous semble que cela tient à ce que le point de départ de la démonstration qui en résulte et qu'on donne dans les Traités de trigonométrie est un peu éloigné des principes dont on y fait usage. Et ce n'est qu'en y portant une certaine attention qu'on voit comment, au moyen des raisonnements employés, et sans avoir égard aux démonstrations précédentes, les égalités (1) dont il s'agit, composées de fonctions transcendentes, sont des identités ou des égalités de même espèce que l'égalité algébrique (2).

En se reportant aux excellentes leçons de trigonométrie de Briot et Bouquet, on voit que ces deux auteurs font découler la démonstration des identités (1) de la considération d'un polygone plan (et il pourrait être gauche), analogue au polygone des forces de la statistique, et qui résulte de la composition d'un système de forces appliquées à un point matériel et ayant des directions quelconques. Ils considèrent en même temps le côté qui le ferme et qu'ils appellent la résultante. Ils imaginent ensuite que le polygone et la résultante sont parcourus par un mobile à partir de leur origine commune. Ce mobile part ainsi, dans l'un et dans l'autre cas, d'un même point pour aboutir à un même second point. Ils projettent ces deux chemins ainsi parcourus sur le même axe et ils concluent que les deux résultats sont identiques, ce qui est vrai. Mais la solution étant ainsi présentée à cette distance du point de départ de la statique et dans un ordre d'idées bien différent de celui qui fait l'objet de la trigonométrie, on ne voit

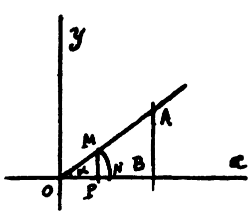
pas bien les raisons de cette identité et pour bien s'en rendre compte, il est nécessaire de remonter à ce même point de départ.

On sait que dans la statique les opérations au moyen desquelles on parvient à former des identités sont purement géométriques, et que c'est par des constructions géométriques qu'on est amené à faire effectuer à toutes les forces appliquées à un point, sauf à l'une quelconque d'entre elles, des translations convenables, ce qui conduit aux polygones dont nous venons de parler et aux côtés qui les ferment. Ces polygones et ces côtés constituent des quantités géométriques formant de véritables identités, c'est-à-dire des quantités pouvant être substituées les unes aux autres.

Maintenant, la traduction en langage algébrique de ces identités qui ont une forme géométrique, se trouve fondée sur la solution du problème inverse suivant : « Décomposer une force donnée en deux ou trois autres ayant des directions assignées à l'avance. » On peut prendre ces directions absolument quelconques à partir du point d'application de la force donnée, et par conséquent rectangulaires. En décomposant ainsi à l'aide du parallélogramme ou du parallélipipède des forces, toutes les forces appliquées au même point pris pour origine, ainsi que leur résultante, en deux ou trois autres ayant les directions données, on remplace l'identité géométrique dont nous venons de parler, par deux ou par trois autres identités ayant un sens arithmétique et absolument analogue à celles qui naissent de l'addition algébrique ; car par cette décomposition, on est ramené à une nouvelle composition des forces qui coïncide avec l'addition algébrique. Dans les ouvrages de trigonométrie, on se borne à considérer la projection du polygone des forces et celle de la résultante sur un seul axe, et on égale la somme des projections des différents côtés à la projection de la résultante. Si la résultante est nulle, ou que le polygone se ferme, le second membre de l'identité est nul. Tels sont les principes dont on paraît faire implicitement usage dans les traités actuels de trigonométrie pour établir les formules (1).

IV

Mais la discussion précédente met sur la voie pour arriver aux mêmes formules à l'aide d'une méthode indépendante de la statique et uniquement fondée sur la définition donnée en géométrie plane, de la projection d'une droite sur une autre droite, rapprochée de l'arithmétique, de la variation des lignes trigonométriques, et enfin, de la multiplication algébrique.



Soient en effet deux axes rectangulaires $x'x$ et $y'y$, une droite OA, d'abord de longueur constante, mais absolument quelconque et sa projection OB sur Ox. On a l'identité purement arithmétique :

(4) $$\text{OB} = \text{OA} \times \frac{\text{OB}}{\text{OA}}.$$ (*A suivre*).

Le Directeur-gérant,
GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^T-CYR

(*A cette époque de l'année beaucoup de nos abonnés nous demandent des questions pouvant être posées à l'oral; nous leur en donnons dans ce numéro, un certain nombre ayant été demandés plusieurs fois*).

260. — Trouver la somme des n premiers nombres entiers. Trouver la somme des carrés des n premiers nombres entiers.

Etudier les variations de la fonction :

$$y = \sin^2 x - \sin x + 1.$$

Couper une pyramide par un plan parallèle à la base de façon que le volume de la petite pyramide partielle soit le septième du volume du tronc de pyramide restant.

261. — Définition et calcul du volume du segment sphérique. On donne un triangle ABC, trouver un point M sur la base BC, tel que $\overline{MA}^2 = MB \times MC$. Examiner successivement le cas où le point M est extérieur au segment BC et le cas où le point M est intérieur au segment BC.

Résoudre l'équation : $\sin 3x = \cos x$.

262. — Construire en géométrie cotée l'angle d'une droite et d'un plan donnés par leurs échelles de pente.

Résoudre et construire un triangle, connaissant la longueur α d'une bissectrice et les longueurs l et m des segments qu'elle détermine sur le côté opposé.

On donne la projection $a\ b\ c\ d\ e$ d'un polygone plan et les cotes des trois sommets $a\ b\ c$, on demande les cotes des deux autres sommets $d\ e$.

263. — On donne sur une droite trois points A, B, C, construire le conjugué harmonique du point C par rapport aux points A et B.

On donne un triangle ABC, trouver un point S de l'espace d'où l'on voit les côtés AB, AC, CB, sous un angle droit. Nombre de solutions. Calculer les côtés SA, SB, SC du trièdre trirectangle ainsi obtenu.

264. — Mener à l'ellipse une tangente par un point donné.

Trouver parmi les pyramides à base carrée, ayant même arête a, celle dont le volume est maximum.

265. — Construire un tétraèdre régulier dont on donne trois sommets et le centre.

Résoudre le système : $x + y = a \quad \sin^2 x + \sin^2 y = b$.

266. — Résoudre un triangle connaissant log b, log c et A. Trouver une normale commune à deux cylindres de révolution. Incidemment : peut-on toujours mener à un cylindre un plan tangent parallèle à un plan donné ?

On donne une sphère impénétrable et un point A sur cette sphère ; construire le point A′ diamétralement opposé au point A sur la sphère.

Dans un triangle ABC on donne la hauteur b issue du sommet A et les segments m et n que cette hauteur h détermine sur le côté BC, on demande de calculer l'angle A.

267. — Construire en géométrie cotée la perpendiculaire commune à deux droites.

Etudier la fonction : $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

On donne un triangle ABC ; trouver à l'intérieur de ce triangle le point M tel que l'on ait :

$$\frac{\text{aire MBC}}{1} = \frac{\text{aire MAC}}{2} = \frac{\text{aire MAB}}{3}.$$

268. — En supposant $b^2 - ac < 0$, étudier le signe de l'expression $ax^2 + 2bx + c$, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Définition de la pyramide régulière. Par quelle longueur faut-il multiplier la surface latérale de la pyramide pour obtenir son volume ?

On donne dans un triangle les côtés b, c et la surface $\frac{h^2}{2}$; calculer les autres éléments du triangle.

269. — Résoudre un triangle connaissant b, c, A. Calculer la surface.

Trouver l'angle de deux plans en géométrie cotée.

270. Physique. — Comment est constitué un galvanomètre ? Comment l'aiguille est-elle rendue astatique ? Quelle est l'action de la bobine sur l'aiguille supérieure ? Action de la partie supérieure de la bobine sur l'aiguille inférieure ? Quelle est donc l'utilité de la seconde bobine introduite ? Si les deux aiguilles

étaient également aimantées qu'arriverait-il? Pourrait-on mesurer l'intensité du courant avec un tel appareil? A quoi pourrait servir l'appareil?

Qu'entend-on par projection stéréographique? Quels sont les grands avantages de la projection stéréographique? Montrer qu'elle conserve les angles.

271. — Qu'entend-on par électrolyse? Quelles sont les lois de l'électrolyse? Comment se fait la décomposition des sels de cuivre? Principe de la galvanoplastie.

Parler du phosphore. — Quelles sont les propriétés de ce corps? Où le trouve-t-on? A quoi emploie-t-on le phosphore?

272. — Parler de la lunette astronomique. Qu'appelle-t-on foyer d'une lentille? Ecrire la marche des rayons dans la lunette astronomique. Qu'entend-on par champ d'une lunette astronomique? Conserve-t-on dans la lunette tout le champ susceptible d'avoir? Dans ce champ, toutes les parties de l'image sont-elles également éclairées? Examiner l'image au point de vue de son éclairement, d'un point situé sur le bord du champ.

273. — Lecture d'une carte d'Etat-Major.

274. — Quelles sont les lois de la chute des corps? Calculer le temps que met un corps en tombant d'une hauteur h. Quelle sera la vitesse acquise par ce corps, au bas de sa chute? Supposons qu'à ce moment le corps rencontre la surface d'une masse d'eau, combien mettra-t-il à parcourir une longueur l dans cette masse, en supposant la résistance de l'eau nulle?

Qu'est-ce que l'ammoniaque? D'où retire-t-on industriellement ce gaz? Que donnent comme résidu les eaux d'épuration?

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

275. Mathématiques. — Le moment de la résultante de plusieurs forces parallèles à un plan est égal à la somme des moments des composantes. Démontrer le théorème pour les moments de deux forces parallèles et de leur résultante par rapport à un point de leur plan.

Citer les diverses expressions de l'aire d'un triangle en trigonométrie. Démontrer que $S = \dfrac{a^2 \sin B \sin B}{2 \sin A}$.

Résoudre le système : $\begin{cases} x + y + xy = a \\ x^2 + y^2 - (x + y) = b. \end{cases}$

276. — Définir l'axe radical de deux circonférences. Démontrer que le lieu des points d'égale distance par rapport à deux circonférences est bien une droite.

On donne une droite par ses deux projections ; trouver les angles qu'elles font avec les plans de projection.

Caractère de divisibilité d'un nombre par 9.

Calculer tg $2a$ connaissant tg a. — x' et x'' étant les racines de $x^2 + px + q = 0$ former une équation qui admette pour racines $(x' + x'')^2$ et $(x' - x'')^2$.

277. — Parler des éléments qui servent de base au système métrique. Quelle différence essentielle existe entre les mesures de volume et les mesures de capacité?

Calculer sin a et cos a connaissant tg $\frac{a}{2}$.

Trouver une progression arithmétique de 4 termes connaissant la somme de ces termes et celle de leurs inverses.

278. — Réduction de plusieurs fractions au même dénominateur. Obtenir le plus petit numérateur commun.

Calculer sin $2a$ connaissant sin a et cos b.

Construire la courbe : $y = \dfrac{x^3}{1 - x}$.

279. — Définir le centre de gravité d'une aire plane. Indiquer un procédé pour trouver le centre de gravité de l'aire d'un polygone quelconque. En quoi consiste le théorème des moments? Détermination du centre de gravité au moyen de ce théorème.

Etablir, entre les éléments d'un triangle, la relation :

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

Utiliser le théorème des projections pour obtenir une formule générale. Quelle formule obtiendrait-on en projetant le contour du triangle sur un axe faisant un angle α avec l'un des côtés ? —

Résoudre le système : $\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$

280. Chimie. — Pourquoi a-t-on mis le soufre et l'oxygène dans la même famille des métalloïdes? Sulfocarbonates.

281. — Anhydride azotique. Sa préparation. Propriétés.

Acide bromhydrique. Préparation. Comment peut-on recueillir le gaz bromhydrique sec? Peut-on le dessécher avec de l'acide sulfurique? Peut-on préparer l'acide bromhydrique par l'action du brome sur certaines matières organiques chauffées? Propriétés de l'acide bromhydrique. — Sulfure de carbone. Préparation. Usages.

282. — Hydrogène. Préparation de l'hydrogène. Méthode générale; décomposition de l'eau par un métal facilement oxydable. — Attaque d'un métal par de l'acide étendu. Action de l'acide chlorhydrique sur le zinc. Impuretés. Purification.

Iode. Préparation. Propriétés. Action de l'iode sur les dissolutions alcalines.

Chlorure de silicium. Préparation. Propriétés du chlorure de silicium. Son action sur l'eau. Est-ce un corps solide, liquide ou gazeux? Action du chlorure de silicium sur l'alcool. Action de l'hydrogène sur le tétrachlorure de silicium.

283. — Bioxyde d'azote. Préparation. Propriétés. Est-ce un composé stable? — Acide chlorydrique. Préparation. Quelle est la préparation industrielle? Quels sont les appareils dans lesquels s'effectue la réaction? Comment se forme le sulfate neutre et dans quelles conditions? Propriétés de l'acide chlorydrique.

Bore et acide borique. Préparation. D'où provient le borate de chaux? Quelle est la formule de l'acide borique? Préparation du borax. Comment peut-on passer de l'acide borique au biborate de soude?

284. — Synthèse de l'eau. Eudiomètre. Autres méthodes.

Hydrosulfite et hyposulfite de sodium. Préparation de l'hydrosulfite de sodium. Comment peut-on séparer l'hydrosulfite du sulfite et du bisulfite qui se forment en même temps? Comment peut-on distinguer l'hydrosulfite du bisulfite? Propriétés de l'hyposulfite et ses usages? Que donne-t-il traité par un acide? — Hydrogène arsenié. Préparation. Action de l'hydrogène sur l'anhydride arsénieux. Comment distingue-t-on les taches d'arsenic des autres taches métalliques?

285. — Sulfure de carbone. Préparation du sulfure de carbone. Analogies du sulfure de carbone et de l'acide carbonique. Sulfo-carbonates.

286. Physique. — Loi de Mariotte. Enoncé de la loi. Véri-

fication. Cette loi est-elle exacte? Les gaz s'en écartent-ils beaucoup? Dans quel sens s'en écartent-ils? Y a-t-il beaucoup de gaz qui se compriment moins que ne l'indique la loi de Mariotte?

Lunette de Galilée. Marche des rayons dans l'appareil. Quels sont les avantages de la lunette de Galilée?

287. — Hygrométrie. Qu'appelle-t-on état hygrométrique? Peut on trouver l'état hygrométrique si on connaît la tension de la vapeur d'eau et l'humidité de l'air? Comment peut-on mesurer l'état hygrométrique? Hygromètre de condensation? Hygromètre d'Alluard. Est-ce un hygromètre très précis?

Qu'entend-on par électrisation par influence? Dans quel cas la quantité d'électricité qui se développe sur le corps influencé est-elle égale à la quantité d'électricité contenue sur le corps influançant? Cylindre de Faraday.

288. — Aérostat. Théorie de l'aérostat en négligeant le volume des accessoires. En supposant l'aérostat plein et fermé, calculer le moment où le ballon s'arrêtera? Pourra-t-on calculer *à priori* la hauteur que l'on pourra atteindre? L'aérostat est-il d'ordinaire fermé? — Microscope composé. Description de l'appareil. Construction de l'image d'un objet. Marches des rayons. L'oculaire se trouve-t-il au gros bout ou au petit bout? Mesure du grossissement.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

289. Mathématiques. — 1er *sujet :* Tout déplacement d'une figure plane de forme invariable, dans son plan, se ramène à une rotation ou à une translation.

2e *sujet* : Inscription dans un cercle du décagone régulier.

3e *sujet* : Mesure de la surface d'un rectangle.

Obligatoire : Deux forces P et Q appliquées à un corps solide font entre elles un angle α. Trouver leur résultante R et les angles que fait sa direction avec celle des deux forces données : (application) $P = 12^{kg},235$; $Q = 2^{kg},649$; $\alpha = 75^\circ 31' 5''$.

290. Physique. — 1er *sujet* : Définition de la déclinaison et de l'inclinaison.

2e *sujet* : Courants thermo-électriques.

3e *sujet* : Induction électrique. Expériences fondamentales.

Obligatoire : Un corps est lancé verticalement dans le vide et de haut en bas, avec une vitesse égale à 20 mètres par seconde. Au bout de quel temps sa vitesse sera-t-elle devenue égale à 40 mètres? Quel espace aura-t-il parcouru alors ?

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES-SCIENCES)

291. Mathématiques. — 1er *sujet* : Théorie de la balance de Quintenz.

2e *sujet* : Une figure plane qui ne sort pas de son plan peut passer de l'une de ses positions donnée à une rotation exécutée autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure et convenablement choisi (le démontrer).

3e *sujet* : Qu'est-ce que le jour solaire vrai? Qu'est-ce que le jour solaire moyen? Expliquer leurs définitions.

Obligatoire : Un point situé dans le point vertical de projection est défini par ses projections m, m'. On demande de représenter une droite qui, passant par ce point, fera respectivement avec le plan horizontal et le plan vertical des angles donnés α et β (xy est la ligne de terre).

292. Physique. — 1er *sujet* : Poids spécifique des solides et des liquides.

2e *sujet* : Notions expérimentales du potentiel et de la capacité *électro-statique*.

3e *sujet* : Densité des gaz.

Obligatoire : Une bille roule sur un plan parfaitement poli et suivant la ligne de pente de ce plan. Le plan est incliné de 45° sur l'horizon. Calculer l'accélération du mouvement de la bille connaissant l'accélération g des corps pesants en chute libre ($g = 9{,}809$).

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

293. Arithmétique. — Partager 12051 francs entre trois personnes âgées l'une de 32 ans, la seconde de 25 ans et la troi-

sième de 16 ans, de manière que leurs parts soient inversement proportionnelles à leurs âges.

Calculer $x = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{7528}{6992} + \sqrt{\dfrac{7531}{7842}}}}$.

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

294. Algèbre. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} -3x + 8y + 6z^3 = 0 \\ -x - 2y^2 + 12z^3 = -4 \\ -2x + 6y^2 - 3z^2 = -5. \end{cases}$$

295. Arithmétique. — Trois ouvriers A, B, C ont un ouvrage à faire, A et B ensemble pendant quatre jours feraient les $\frac{2}{3}$ de l'ouvrage. — B et C, ensemble pendant huit jours, feraient les $\frac{14}{15}$. A et C pendant cinq jours feraient ensemble les $\frac{3}{4}$.

On occupe A seul pendant deux jours, B seul pendant six jours. Combien C seul mettra-t-il à terminer l'ouvrage?

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE SAINT-CYR
(CONCOURS DE 1898)

I. — *Déterminer les deux bases d'un trapèze rectangle connaissant sa hauteur* h, *sa surface* $\frac{1}{2}$ hm *et le produit* k² *de ses deux diagonales.* — *Discuter.*

Soit ABCD le trapèze dont les angles droits sont en A et D. Désignons les bases AB et CD par x et y, et la surface du trapèze par S. On a $\frac{1}{2}hm = \text{S}$ et, par conséquent (1) $x + y = m$.

D'autee part, $\text{AC.BD} = k^2$,

ou $\sqrt{h^2 + y^2}.\ \sqrt{h^2 + x^2} = k^2$,

ou, élevant au carré (2) $x^2y^2 + h^2(x^2 + y^2) + h^4 = k^4$.

Nous avons donc à résoudre les équations (1) et (2). Or

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = m^2 - 2xy,$$

de sorte que (2) donne l'équation suivante en (xy)

$$x^2y^2 - 2h^2xy + h^2m^2 - k^4 + h^4 = 0.$$

D'où (2) $xy = h^2 \pm \sqrt{k^4 - h^2m^2}$.

On est donc ramené au problème connu de trouver deux longueurs x et y, connaissant leur somme (1) et leur produit (2).

L'équation qui donne à la fois x et y est

$$X^2 - mX + h^2 \pm \sqrt{k^4 - h^2m^2}.$$

D'où (3)
$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4h^2 \pm 4\sqrt{k^4 - h^2m^2}}}{2}.$$

Le problème semble comporter quatre solutions : il n'en a en réalité que deux, par suite de la symétrie des variables x et y.

La discussion provient du signe de chacun des radicaux de (3). Elle est donc des plus faciles.

La condition de réalité du petit radical est

$$k^4 > h^2m^2, \quad \text{ou} \quad k^2 > 2S.$$

Celle du grand radical est $4\sqrt{k^4 - h^2m^2} < m^2 - 4h^2$,

ou
$$16(k^4 - h^2m^2) < (m^2 - 4h^2)^2,$$

qui revient à $16k^4 < (m^2 - 4h^2)^2 + 16h^2m^2$, $\quad 16k^4 < (m^2 + 4h^2)^2$,

ou
$$4k^2 < m^2 + 4h^2,$$

et
$$k^2 < \frac{m^2}{4} + h^2.$$

Voici maintenant sous forme de tableau, le détail de la discussion. — Remarquons d'abord que si l'une des valeurs x et y est négative, les points B et C se trouvent alors de part et d'autre de la hauteur AD et le trapèze ABCD est alors un *trapèze de seconde espèce.*

1° $k^4 < h^2m^2$, $k^2 < 2S$.	. . . .	2 trapèzes imaginaires.
2° $k^4 > h^2m^2$, $k^2 > 2S$	a) $h^4 > k^4 - h^2m^2$ $\quad k^4 < h^4 + h^2m^2$.	2 trapèzes de 1re espèce.
	b) $h^4 < k^4 - h^2m^2$ $\quad k^4 > h^2 + h^2m^2$.	1 trapèze de 1re espèce. 1 trapèze de 2e espèce.
	c) $h^4 = k^4 - h^2m^2$ $\quad k^4 = h^4 + h^2m^2$.	1 trapèze (*) et 1 trapèze réduit à un triangle.
3° $k^4 = h^2m^2$, $k^2 = 2S$	a) $m < 2h$	1 trapèze imaginaire.
	b) $m = 2h$	1 carré.
	c) $m > 2h$	1 trapèze réel.
4° $k^2 > \frac{m^2}{4} + h^2$.	. . . .	2 trapèzes imaginaires.
5° $k^2 < \frac{m^2}{4} + h^2$.	. . . .	2 trapèzes réels. (dans les mêmes conditions que dans 2°).
6° $k^2 = \frac{m^2}{4} + h^2$	. . . . .	1 carré et un trapèze réduit à 1 triangle.

II. — *On donne deux droites de l'espace,* AX *et* BY *orthogonales entre elles et ayant* AB *pour perpendiculaire commune. On prend sur* AX *une longueur variable* AM *et sur* BY *une longueur* BN *égale à* AM.

1° *Démontrer que la sphère qui a* MN *pour diamètre passe par les points* A *et* B.

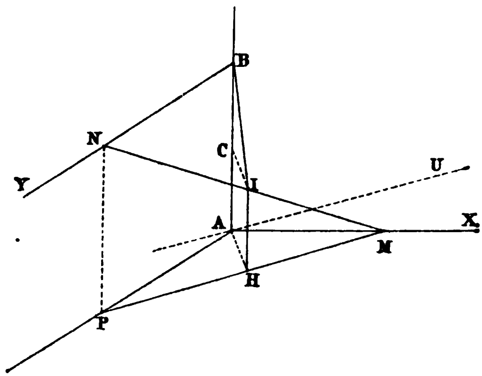
(*) Ce trapèze sera réel si $m > 2h\sqrt{2}$, imaginaire si $m < 2h\sqrt{2}$, et un carré si $m = 2h\sqrt{2}$.

2° *Trouver le lieu du centre de cette sphère.*

3° *Démontrer que le plan tangent en A à cette sphère passe toujours par une certaine droite fixe.*

4° *Démontrer que la droite MN reste parallèle à un certain plan fixe.*

1° Soient : P la projection du point N sur le plan mené par AX parallèlement à BY, C le milieu de AB, I le milieu de MN, H la projection de I sur PM. Il en résulte que IH $= \frac{NP}{2} = \frac{AB}{2} =$ AC. Le triangle AIB est donc isoscèle ; et IA = IB. Il reste à démontrer que IB = IM = IN.



Posons AB $= d$ et AM = BN $= x$. Le triangle rectangle MPN donne

$$\overline{MN}^2 = \overline{NP}^2 + \overline{PM}^2 = d^2 + (\overline{AM}^2 + \overline{AP}^2) = d^2 + 2x^2,$$

et

$$(1) \qquad \overline{IM}^2 = \frac{\overline{MN}^2}{4} = \frac{d^2}{4} + \frac{x^2}{2}.$$

D'autre part, le triangle rectangle ICB donne

$$\overline{IB}^2 = \overline{IC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CB}^2 = (\overline{AM}^2 + \overline{HM}^2) + \overline{CB}^2,$$

$$(2) \qquad \overline{IB}^2 = x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{d^2}{4} = \frac{x^2}{2} + \frac{d^2}{4}.$$

En composant (1) et (2), on a bien IM = IB.

2° Le point I, centre de la sphère ABMN, est toujours situé dans e plan fixe mené par le milieu C de AB perpendiculairement à AB, et dans ce plan le lieu est une droite.

3° Le plan tangent en A coupe le plan APM, suivant la droite AU perpendiculaire à AH. Cette droite est fixe, puisqu'elle est la bissectrice extérieure de l'angle MAP.

4° Le plan MNP est toujours parallèle au plan ABU : la droite MN située dans ce plan est donc toujours parallèle au plan fixe ABU.

E.-N. Barisien.

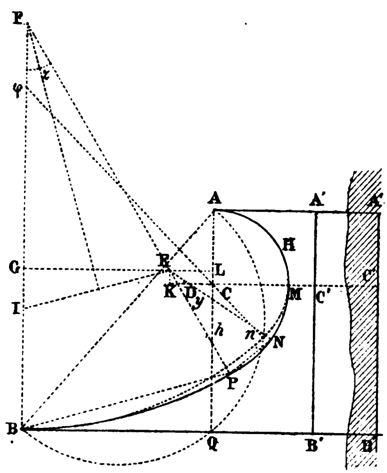
TROISIÈME PARTIE

DE LA SCOTIE OU DE L'ARC RAMPANT

Ces courbes servent, en architecture, à raccorder deux horizontales ou deux verticales. Elles sont à deux ou à plusieurs centres.

1° Scotie à quatre centres. Construction (A. Tronquoy, dessin linéaire géométrique, 1re partie, 1878, Delagrave).

« Soient données les parallèles AA′ et BB′. Des points A et B et d'un
« troisième A′ pris à volonté, menez les perpendiculaires AC, BF et A′B′;
« divisez A′B′ en trois parties
« égales, et menez C′C paral-
« lèle à A′A; du point C avec
« un rayon CA décrivez l'arc
« AM; divisez CM en trois
« parties égales et portez de C
« en D le tiers de CM; puis, du
« point D, avec la distance DM
« décrivez l'arc indéfini MN;
« prenez la corde de la moitié
« de l'arc AM et portez cette
« longueur de M en N; alors
« joignez ND et divisez cette
« ligne en quatre parties éga-
« les; portez l'un des quarts
« de D en E et de ce point
« comme centre décrivez l'arc
« NP; portez ensuite EN de B
« en I et tracez IE; enfin élevez
« sur le milieu de IE une per-
« pendiculaire dont l'intersection avec BF donnera le centre F de l'arc PB
« qui terminera la scotie ».



La scotie ainsi déterminée dépend de deux éléments linéaires, savoir de A′B′ ou AQ $= h$ distance des horizontales, et de BQ $= a$.

Les trois premiers centres C, D, E et les rayons CA, DM, EN ne dépendent que de h, et l'on a, en posant : $\widehat{NDM} = x$, $\widehat{PEN} = y$, $\widehat{BFP} = z$.

$$CA = \frac{h}{3}, \quad DM = \frac{4h}{9}, \quad EN = \frac{5h}{3},$$

et encore $$FP = \frac{5h}{9} + FE = \frac{5h}{9} + \frac{EI}{2 \sin\left(\frac{IFE}{2}\right)} = \frac{5h}{9} + \frac{EI}{2 \sin \frac{z}{2}}.$$

Le premier arc AM est un quadrant, et $\widehat{ACM} = 90°$.

D'autre part, soit H le milieu de l'arc AM ; il vient :

$$MH = \frac{2h}{3} \sin \frac{45°}{2} = \frac{8h}{9} \sin \frac{x}{2},$$

d'où $$\sin\frac{x}{2} = \frac{3}{4}\sin\frac{45^\circ}{2} = \frac{3}{8}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Le calcul donne : $x = 33^\circ 21' 30''$.

Les autres arcs NP et PB répondant aux angles $\widehat{NEP} = y$ et $\widehat{PFB} = z$ dépendent de h et de a. On trouvera d'abord :

$$LC = ED \sin x = \frac{h}{9}\sin x$$

$$EL = DC + DK = \frac{h}{9} + ED\cos x,$$

puis : $$\overline{EI}^2 = \overline{EG}^2 + (LQ - IB)^2 = (a - EL)^2 + (LQ - EN)^2$$

$$\overline{EI}^2 = \left(a - \frac{2h}{9}\cos^2\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{81}(1 + \sin x)^2.$$

D'ailleurs ; $EG = EI\cos\frac{z}{2}$, d'où $\cos\frac{z}{2} = \dfrac{a - \frac{2h}{9}\cos^2\frac{x}{2}}{EI}$,

on tirera de là z en fonction de x et du rapport $\frac{a}{h}$.

D'autre part : $$90^\circ + x + y + z = 180^\circ,$$
d'où $$y = 90 - (x + z) = 73^\circ 19' 15'' - z.$$

On voit en outre que
$$\widehat{BPN} = \widehat{BPF} + \widehat{EPN} = \frac{180 - z}{2} + \frac{180 - y}{2} = 135^\circ + \frac{x}{2} = 151^\circ 40' 45''.$$

Le point de raccord P est donc sur l'arc décrit sur BN et capable de $151^\circ 40' 45''$. Ce résultat est indépendant de la position du centre E, de sorte que les deux derniers arcs pourraient se raccorder en tout autre point de l'arc de ce segment.

2° Courbe à deux centres AMnB.

Décrivons sur AB la demi-circonférence AnQB. Tout point n de cette courbe peut servir de raccordement à deux arcs dont l'un, tangent en A, ayant son centre en un point quelconque C de AQ et l'autre, tangent en B, ayant son centre au point de rencontre φ de nC avec BF.

La seule particularité de l'arc rampant est de raccorder deux verticales, tandis que la scotie raccorde deux horizontales ; les constructions sont donc identiques. **H. Lecocq.**

QUESTION 731

Deux droites Δ et Δ' sont perpendiculaires à une droite Δ'' et la rencontrent en A *et* B. *On considère deux cercles* C *et* C', *le premier tangent à Δ et Δ'', le second tangent à Δ' et Δ'' : ces deux cercles sont de plus tangents entre eux en* M. *La droite* BM *rencontre Δ en* A' *et la droite* AM *rencontre Δ' en* B'. *Montrer que* AA' *et* BB' *sont respectivement égaux aux diamètres des cercles* C *et* C'. **(E.-N. Barisien).**

Solution, par **A. Droz-Farny.**

Soient γ, γ', m les projections de C, C', M sur Δ''. La tangente commune aux deux cercles, coupe $\gamma\gamma'$ en son point milieu D et on aura dans le triangle rectangle CDC' : $DM = \frac{\gamma\gamma'}{2} = \sqrt{RR'}$, donc $AB = R + R' + 2\sqrt{RR'}$.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE, 1897

Arithmétique et Algèbre

Géométrie

Trigonométrie

Baccalauréats

Mélanges et Correspondances

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

ST-AMAND, CHER. — IMPRIMERIE BUSSIÈRE FRÈRES

Dans le trapèze $C\gamma C'\gamma'$ on a :

$$\frac{\gamma m}{R} = \frac{\gamma' m}{R'} = \frac{2\sqrt{RR'}}{R+R'}, \quad \text{d'où} \quad \gamma m = \frac{2R\sqrt{RR'}}{R+R'},$$

et
$$Am = \frac{R^2 + RR' + 2R\sqrt{RR'}}{R+R'}.$$

On trouverait de même : $\quad Mm = \dfrac{2RR'}{R+R'}.$

Donc :
$$\operatorname{tg} MAm = \frac{Mm}{Am} = \frac{2R'}{R+R'+2\sqrt{RR'}} = \frac{2R'}{AB},$$

d'où $\quad BB' = 2R', \quad$ de même $\quad AA' = 2R.$

Solutions exactes : **Ernest Foucart, Georges Daly, Svéchnicoff, Rebeix, L'Huillier.**

QUESTION 740

Solution, par **Ernest Foucart**

La tangente en un point M *d'une parabole, de sommet* O, *rencontre l'axe de la parabole en* T *et la tangente au sommet en* T'.

La droite Δ *menée, par* O, *parallèlement à la tangente* MTT', *rencontre la parallèle menée par* T, *à* OM, *en* P, *et la parallèle menée par* T' *à* OM, *en* P'.

Quand le point M *parcourt la parabole, le point* P, *le point* P' *et le milieu de* PP' *décrivent chacun une parabole.* (**E.-N. Barisien**).

L'ordonnée de M rencontre Δ en M_1.

On a $\quad OP' = OM_1 \quad OP = 2OM_1.$

Le lieu de M_1 est évidemment une parabole de sommet O de paramètre égal au quart du paramètre de la primitive. Il est alors évident, d'après les relations précédemment écrites, que les différents points considérés décrivent des paraboles.

Solutions exactes : **L'Huillier, Francis Dauzats.**

SOLUTION DE LA QUESTION 742

Soit donné un triangle ABC *et soient* A_1, B_1, C_1, *les points où les médianes coupent le cercle circonscrit au triangle* ABC. *Si* S *et* S_1 *représentent les surfaces des triangles* ABC *et* $A_1B_1C_1$ *on a la relation*

$$\frac{S_1}{S} = \frac{(a^2+b^2+c^2)}{\left[2(b^2+c^2)-a^2\right]\left[2(a^2+c^2)-b^2\right]\left[2(a^2+b^2)-c^2\right]}.$$

Jorge F. d'Avillez.

Si nous désignons par $A_1B_1C_1$ les points de rencontre des médianes avec le cercle circonscrit, et par G le centre de gravité du triangle, nous avons

$$\frac{GA_1B_1}{GAB} = \frac{GA_1.GB_1}{GA.GB};$$

mais $\quad GA_1 = \frac{2}{3} m_a, \quad GB = \frac{2}{3} m_b, \quad$ ou $\quad \dfrac{GA_1B_1}{GAB} = \dfrac{GA_1.GB_1}{\frac{4}{9} m_a m_b}.$

Si nous désignons le milieu du côté BC par A_2, le milieu du côté AC par B_2, et le milieu du côté AB par C_2, alors la ligne $GA = GA_2 + A_1A_2$, mais par le théorème de Stewart nous avons

$$b^2 + c^2 = \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.AA_1$$

d'où

$$AA_1 = \frac{b^2 + c^2}{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}},$$

et si nous retranchons de AA_1, AA_2, nous avons A_1A_2,

ou $$A_1A_2 = \frac{a^2 + c^2}{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = \frac{2(b^2+c^2-2(b^2+c^2)+a}{2\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}} = \frac{a^2}{4m_a},$$

ou $$GA_1 = \frac{1}{3} m_a + \frac{a^2}{4m_a} = \frac{3a^2 + 4m_a^2}{12m_a}.$$

Dans le triangle BGC, d'après un théorème connu, nous avons

$$\frac{4}{9} m_b^2 + \frac{4}{9} m_c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{2}{9} m_a^2,$$

d'où $$a^2 = \frac{4}{9}\left[2(m_b^2 + m_c^2) - m_c^2\right],$$

en mettant au lieu de a^2 sa valeur, nous avons

$$GA_1 = \frac{2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)}{9m_a}.$$

De la même manière $$GB_1 = \frac{2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)}{9m_b}.$$

Ainsi nous avons

$$\frac{GA_1B_1}{GAB} = \frac{4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^2}{81m_am_b}\frac{4}{9}m_am_b = \frac{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^2}{9m_a^2m_b^2}.$$

De la même manière nous aurons les deux autres quotients

$$\frac{GA_1C_1}{GAC} \quad \text{et} \quad \frac{GB_1C_1}{GBC},$$

mais $$\frac{GA_1B_1}{3GAB} = \frac{GA_1B_1}{ABC} = \frac{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^2}{27m_a^2m_b^2}.$$

Et $$\frac{GA_1C_1}{3GAC} = \frac{GA_1C_1}{ABC}, \quad \frac{GB_1C_1}{3GBG} = \frac{GB_1C_1}{ABC}.$$

Faisons la somme de ces trois quotients, il vient

$$\frac{S_1}{S} = \frac{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^3}{27m_a^2m_b^2m_c^2},$$

mais $$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

ou $$(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^3 = \frac{27}{64}(a^2 + b^2 + c^2)^3$$

$$m_a^2m_b^2m_c^2 = \frac{1}{64}\left[2(b^2 + c^2) - a^2\right]\left[2(a^2 + c^2) - b^2\right]\left[2(a^2 + b^2) - c^2\right]$$

en mettant ces valeurs au milieu du dénominateur et du numérateur, il vient

$$\frac{S_1}{S} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\left[2(b^2 + c^2) - a^2\right]\left[2(a^2 + c^2) - b^2\right]\left[2(a^2 + b^2) - c^2\right]} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

N. Plakhowo.

QUESTION 745

Etant donnés trois points M, A, B, *démontrer que pour obtenir l'isotomique du conjugué harmonique de* M *sur* AB, *on peut appliquer le théorème suivant.*

Soient C, C' *les points de la perpendiculaire élevée au milieu de* AB, *d'où l'on voit* AB *sous un angle droit*; *la circonférence passant par* C, C', M *coupe* AB *au point cherché.* **G. L.**

Solution, par **A. Droz-Farny**

Soient O, le point milieu de AB, M' le conjugué harmonique de M par rapport à AB et μ son isotomique ; on a d'après une propriété bien connue

$$OM.OM' = \overline{OA}^2.$$

D'après la construction indiquée CC' étant l'axe radical des deux circonférences ABC et MCμC' on a aussi

$$OM.O\mu = OA.OB = \overline{OA}^2.$$

donc $O\mu = OM'$ C. Q. F. D.

Solutions exactes : **N. Plakhowo, Ernest Foucart.**

QUESTION 747

Solution par M. **A. Boutin**

On donne un triangle ABC; *en* B, *on élève* BA' *perpendiculaire à* BA ; *en* C, CA" *perpendiculaire à* CA. *On mène par* A *une transversale* AA'A", *telle que* A *soit le milieu de* A'A", *et l'on trace* Aα *perpendiculaire à* A'A".

Démontrer que Aα *et les droites analogues* Bβ, Cγ *sont concourantes.*

(G. L.)

Soient x, y, l, les angles : BAα, CAα, et la longueur AA' = AA". On a :

$$c = l \sin x \qquad b = l \sin y,$$

d'où

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{c}{b}.$$

La droite Aα, est donc telle que les distances d'un de ses points aux côtés qui comprennent l'angle A, soient proportionnelles à ces côtés ; c'est la symédiane issue de A. Les trois droites analogues sont donc concourantes au point de Lemoine de ABC.

Solution exacte : **A. Droz-Farny.**

QUESTION 750

Toute symédiane AK *d'un triangle* ABC *rencontre le cercle de Brocard en un second point* D, *tel que cette symédiane est bissectrice de l'angle* BDC, *et cet angle* BDC *est double de l'angle* A. **(E. Lauvernay).**

Solution et développements, par **A. Droz-Farny**

Construisons les deux cercles adjoints tangents en A aux côtés AC et AB et passant respectivement par les sommets B et C du triangle ABC. Ces cercles se coupent en D. Les droites AD et BD coupent la circonférence circonscrite au triangle en E et F; tirons enfin EF et CD.

De par la construction on a d'abord : angle DAC = DBA = AEF donc AC = EF; angle BAD = ACD = DFE.

Les triangles ADC et DEF sont donc égaux et par conséquent AD = DE.

Les triangles ADC et BDA étant directement semblables, on trouve : 1° que le point D est le point double des figures directement semblables construites sur CA et AB ; 2° les perpendiculaires abaissées de D sur les droites homologues AC et BA étant dans le rapport de ces deux longueurs, AD est la symédiane issue de A ; 3° OD étant perpendiculaire sur AE, D appartient à la circonférence de Brocard, décrite sur OK comme diamètre ; 4° angle

$$BDE = DBA + DAB = A$$

de même $CDE = A.$

La droite AD est donc bissectrice de l'angle BDC. Mais ici le théorème de M. Lauvernay doit être rectifier dans ce sens que

$$BDC = 2A \text{ si A est aigu ou droit.}$$
$$A = 360° - 2A \text{ si A est obtenus.}$$

5° Les points BODC sont sur une même circonférence.

Solution exacte : **M. Seunet.**

QUESTIONS PROPOSÉES

A'B'C' est le triangle médian du triangle ABC. A"B"C" le triangle formé par les tangentes au cercle circonscrit de ABC. Les six points d'intersection des côtes non-correspondantes de ABC, A'B'C' sont sur la même conique.

(Trinity, Cambridge).

P est un point quelconque dans le plan du triangle ABC, PL, PM, PN les perpendiculaires sur les côtés. Trouver le lieu de P, si $\frac{LM}{LN}$ est donné.

(Trinity, Cambridge).

ERRATUM

Numéro de Juin page 148, dernière ligne, lire triangle S'B'C', SC'A', SA'B' au lieu de OB'C', OC'A', OA'B'.

Le Directeur-gérant,

GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE
Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^{T}-CYR

296. — Mener par une droite un plan tangent à une sphère. Faire l'épure en géométrie cotée.

Transformer en un produit de deux facteurs réels du deuxième degré le trinôme bicarré : $x^3 + x^2 + 1$.

Dans un triangle isocèle, on connaît la base et la hauteur relative à cette base, calculer les rayons des cercles inscrit et circonscrit.

On donne un cercle de centre O et un point A intérieur à ce cercle, mener par ce point A une corde CAB telle que

$$AB - AC = l,$$

l étant une longueur donnée.

296 bis. — Dans un cercle donné, inscrire un décagone régulier concave ou convexe.

Déterminer m de manière que l'équation $x^2 - mx + 7 = 0$ ait une racine et une seule comprise entre 1 et 2.

On donne deux segments de droite AB, CD, dans un même plan, on demande le lieu des points P tels que les deux triangles PAB, PAC soient équivalents.

296 ter. — Lecture de la carte d'état-major. Comment oriente-t-on une carte à l'aide d'une boussole ? Que représente le bord droit de la carte d'Etat-Major ? Que faut-il connaître pour faire l'orientation avec la boussole ? Définir le méridien magnétique. Quelle est la déclinaison de Paris ?

296 quater. — Comment compose-t-on deux forces parallèles et de même sens ? de sens contraires ?

Parler du cuivre. Quelles sont ses propriétés ? Quels sont les alliages courants du cuivre ? Parler du laiton. Quelle est la composition du laiton ? Quelle est la proportion de cuivre et de zinc ? Composition du bronze. Quels avantages font utiliser ces deux alliages ? A quelle température se forge le laiton ?

297. — Parler du passage de l'état solide à l'état liquide. Tous les corps fondent-ils de la même façon ? Citer des corps qui fondent en passant par l'état pâteux. Comment se comporte la

fonte de fer quand on la chauffe? Enoncer les lois de la fusion. Indiquer approximativement quelques températures de fusion : étain, soufre, phosphore. Qu'indique la deuxième loi de la fusion? Quelle est la chaleur de fusion de la glace? Est-ce qu'on ne peut faire passer un corps de l'état solide à l'état liquide que par la chaleur? Comment se fait-il que la pression fasse fondre la glace?

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

298. Mathématiques. — Pour quelles valeurs de a l'équation : $x^2 - 2(a-3)x + a^2 - 1 = 0$ a-t-elle ses racines réelles. Indiquer pour chacune de ces valeurs les signes des racines. Construire la courbe : $y = \frac{x^2 - 7x + 10}{(x-1)^2}$.

298 bis. — Calculer par logarithmes :

$$x = \frac{\sqrt[8]{1845} + \pi - 7\pi}{(1 + 1842)\sqrt[23]{59667}}.$$

298ter. Physique et Chimie. — Un tube contenant du mercure est renversé sur une cuve remplie du même liquide; le mercure s'élève à 55 centimètres au-dessus du niveau dans le vase, et laisse un espace de 45 centimètres rempli d'air. Quel sera le volume de l'air quand les surfaces seront sur un même plan horizontal; la pression athmosphérique égale 76 centimètres.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

299. Mathématiques. — On demande ce que devient l'expression $1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^4} \ldots\ldots\ldots\ldots$ quand le nombre α supposé positif et supérieur à 1 s'approche indéfiniment de 1.

(*Au choix*) *a*). — Théorèmes sur les forces parallèles.

b) Théorème de Varignon.

c) Théorie du treuil (ordinaire et différentiel).

299bis. Physique. — Quel volume faut-il attribuer à un

ballon gonflé avec un gaz de densité 0,547 pour qu'il puisse à 0° et à 760 millimètres enlever 200 kilogrammes et posséder une force ascensionnelle de 10 kilogrammes.

(*Au choix*). — *a*) Recherche de la tension maxima de la vapeur d'eau.

b) Chaleur rayonnante.

c) Densité des gaz.

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES-SCIENCES)

300. Mathématiques. — Calculer les coordonnées du point A symétrique du point B $(x_1\ y_1)$ par rapport au cercle $x^2 + y^2 = R^2$.

(*Au choix*). — *a*) Eclipses de lune,

b) Eclipses de soleil.

c) Inégalité des saisons.

300 bis. Physique. — Un objet éclairé est à une distance de 23 décimètres d'un tableau blanc sur lequel on veut projeter son image. En essayant une lentille on trouve qu'on peut lui donner deux positions pour lesquelles la projection a lieu et que ces deux positions sont à une distanc l'une de l'autre égale à $\sqrt{161}$. On demande la distance focale de la lentille.

(*Au choix*). — *a*) Expérience d'Œrstœd.

b) Electroscope à feuilles d'or.

c) Galvanomètres.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

301. Arithmétique. — Trois libraires vendent le même ouvrage d'après les conditions suivantes :

Le premier fait une remise de 25 °/₀ sur le prix fort ou prix marqué de l'exemplaire ;

Le deuxième accorde seulement 19 1/2 °/₀ de remise, mais donne 13 volumes pour 12 ;

Le troisième fait une remise de 22 1/2 °/₀ sur le prix marqué, sans treizième, et accorde en outre un escompte de 3 1/4 °/₀ du prix réduit, à l'acheteur au comptant.

Lequel des trois offre, à l'acheteur au comptant, les conditions les plus avantageuses?

301 bis. — Calculer $x = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{7528\pi + 1}{6573 + 7\pi}}}}$.

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

(*Les modifications récentes apportées aux programmes d'entrée indiquent pour ces Écoles une composition de géométrie*).

302. Arithmétique. — Un négociant qui a emprunté 10 000 francs pour un an à raison de 6 % trouve au bout de quelque temps à emprunter la même somme à 4 ½ %. En conséquence, il rembourse le premier prêteur, et à la fin de l'année il a payé en tout 512fr,50 d'intérêts.

Combien de temps a-t-il gardé l'argent du premier prêteur.

302 bis. Algèbre. — Résoudre le système

$$(x + y)(x^2 + y^2) = 888,$$
$$(x - y)(x^2 - y^2) = 48.$$

302 ter. Géométrie. — Dans un cercle de 26 mètres de rayon, on mène perpendiculairement au diamètre une corde de 24 mètres. Quelles sont la longueur des deux segments formés par la corde sur le diamètre.

DEUXIÈME PARTIE

INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE
(CONCOURS DE 1898)

Solutions, par M. **Léopold Massip**, professeur de mathématiques spéciales à l'École préparatoire Saint-Georges

PREMIÈRE QUESTION. — *Etudier les variations de* $y = \frac{8x^2 + 9x - 14}{x^2 + x - 1}$ *lorsque* x *prend toutes les valeurs possibles. — Donner une représentation graphique de la fonction :*

De $y = \frac{8x^2 + 9x - 14}{x^2 + x - 1}$ je tire : $x^2(8 - y) + x(9 - y) + (y - 14) = 0$.

Exprimons la réalité des racines cela donne :

$$(9 - y)^2 - 4(8 - y)(y - 14) \geqslant 0.$$

Développons les calculs, cette inégalité donne :

$$5y^2 - 106y + 529 \geqslant 0.$$

Calculons les racines du trinôme : $5y^2 - 106y + 529 = 0$ et rappelons que ce trinôme est positif, c'est-à-dire prend le signe de son premier terme pour les valeurs de y *non comprises entre les racines*, ces racines sont :

$$y' = \frac{53 + \sqrt{(53)^2 - 5 \times 529}}{5},$$

$$y'' = \frac{53 - \sqrt{(53)^2 - 5 \times 529}}{5},$$

On voit que y' est un *minimum* et que y'' est un *maximum*. Remarquons que pour ces valeurs y' et y'' de y on a $x = \frac{y - 9}{2(8 - y)}$ ce qui donne sensiblement $x = -0,404$, $x = 12,404$.

Les valeurs de x qui rendent y nul sont les racines de l'équation

$$8x^2 + 9x - 14 = 0$$

il est facile de calculer ces racines.

Les valeurs de x qui rendent y infini sont les racines de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Remarquons, ce qui est nécessaire, que les polynômes $8x^2 + 9x - 14$ et $x^2 + x - 1$ n'ont pas de facteurs communs.

Donnons à x la valeur $\pm\infty$. La valeur de y est 8.

Ajoutons aux valeurs trouvées pour y celle de y pour $x = c$ formons le tableau qui donne les valeurs de x et de y, nous aurons les éléments nécessaires et suffisants pour construire la courbe demandée.

x	$-\infty$	-2	$-1-\sqrt{5}$	0,404	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{7}{8}$	6	12,404	$+\infty$
y	0	0	$\mp\infty$	13,17	14	$-\infty$	0	8	8,039	8
				minimum					*maximum*	

Léopold Massip.

Deuxième question. — *Calculer les côtés d'un trapèze isocèle circonscrit à un cercle de rayon* R *sachant que le volume engendré par ce trapèze lorsqu'il tourne de sa plus grande base est égal à* $8\pi a R^2$. — *Discussion.*

Soient x, y, z les trois côtés consécutifs du trapèze isoscèle. On a dans le cas actuel de la question :

(1) $$\frac{x}{2} + \frac{z}{2} = y.$$

Abaissons une hauteur du trapèze on en conclut :

(2) $$y^2 - \frac{(z-x)^2}{4} = R^2.$$

Pour évaluer le volume engendré décomposons le trapèze en un rectangle (de base x et de hauteur $2z$) et en deux triangles rectangles (l'hypothénuse étant y et les côtés de l'angle droit égaux à $2R$ et à $\left(\frac{z}{2} - \frac{x}{2}\right)$ ceci nous donne l'équation :

(3) $$z + 2x = 6a.$$

L'équation $\frac{x}{2} + \frac{z}{2} = y$ donne $(z + x^2 = 4y^2$

L'équation : $y^2 - \frac{(z-x)^2}{4} = 4R^2$ donne $(z-x)^2 = 4y^2 - 16R^2$.

On en conclut que : $xz = 4R^2$ ou $z.2x = 8R^2$, cette équation rapprochée de $z + 2x = 6a$ montre que z et $2x$ sont racines de $X^2 - 6aX + 8R^2 = 0$.

Pour que les racines de cette équation soient réelles il faut et il suffit que

$$9a^2 - 8R^2 \geqslant 0,$$

d'où

$$a \geqslant \frac{2R\sqrt{2}}{3},$$

la discussion s'achève facilement. **Léopold Massip.**

SOLUTION DE LA QUESTION 205

1) *Un cône de hauteur* h *est inscrit dans une sphère de rayon* R, *à quelle distance* x *du sommet du cône faut-il mener un plan parallèle au plan de sa base pour que l'aire de la section faite dans le cône soit le* $\frac{1}{3}$ *de l'aire de la section faite dans la sphère par le même plan.*

La hauteur du cône étant h, sa génératrice sera $b^2 = 2Rh$ ou $bh = \sqrt{2Rh}$ et $h = \sqrt{2Rh} \cos \varphi$ d'où $\cos \varphi = \frac{h}{\sqrt{2Rh}}$ ou $\sin \varphi = \sqrt{\frac{h}{2R - h}}$.

Le rayon de la base du cône sera égal à h tg $\varphi = \sqrt{h(2R-h)}$.

La section faite dans la sphère par un plan parallèle à la base de la cône aura pour rayon $\sqrt{x(2R-x)}$. Si nous désignons par x la distance du sommet à la section faite par le plan alors la section faite dans le cône aura pour rayon $\sqrt{\frac{x(2R-x)}{3}}$.

Comme le plan est parallèle à la base les deux triangles semblables nous donnent $\frac{x}{h} = \sqrt{\frac{x(2R-x)}{3h(2R-h)}}$.

Elevant cette égalité au carré et divisant l'égalité par $\frac{x}{h}$ il vient :

$$\frac{x}{h} = \frac{2R - x}{3(2R-h)},$$

d'où nous obtenons pour la valeur de x : $x = \frac{Rh}{3R - h}$.

2) Si dans un triangle $\frac{\text{tg } B}{\text{tg } C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$ le triangle est rectangle ou isoscèle.

En remplaçant tg $B = \frac{\sin B}{\cos B}$ et tg $C = \frac{\sin C}{\cos C}$ il vient :

$$\frac{\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\sin C}{\cos C}} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} \quad \text{ou} \quad \frac{\cos C}{\cos B} = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

Or, cette dernière égalité ne peut exister que pour $\sin 2l = \sin 2B$, $B = C$; ou $\cos B = \sin C$.

Dans le premier cas le triangle est isoscèle, dans le second cas il est rectangle. **Natalie Ohotnikoff.**

SOLUTION DE LA QUESTION 153

Trouvez deux nombres dont la somme soit 12 et le produit 35.

Le produit 35 peut être décomposé en deux facteurs d'une seule manière $5 \times 7 = 35$; la somme de ces facteurs est 12 ce qui prouve que les nombres 5 et 7 satisfont à la question.

Ou $x + y = 12$, $xy = 35$ d'où les valeurs de x et de y sont les racines d'une équation de second degré.

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$
$$x = 6 \pm \sqrt{36 - 35} = 6 \pm 1$$
$$x_1 = 7;\ x_2 = 5$$

ou

$$x_1 = 5;\ x_2 = 7.$$

Résoudre

$$x(y + z) = a$$
$$y(x + z) = b$$
$$z(x + y) = c.$$

En retranchant la troisième égalité de la deuxième il vient

$$x(y - z) = b - c$$

divisant la première égalité par l'égalité trouvée nous avons :

$$\frac{y + z}{y - z} = \frac{a}{b - c} \quad \text{d'où} \quad zc\,\frac{b + c - a}{a + b - c};\ x$$

puis retranchant la deuxième égalité de la première et en divisant la troisième égalité par l'égalité trouvée, nous avons :

$$\frac{x + y}{x - y} = \frac{c}{a - b} \quad \text{d'où} \quad y = \frac{b + c - a}{a + c - b}\,\mathrm{X}.$$

Mettons les valeurs de x et de y dans la première équation

$$x^2 = \left(\frac{b + c - a}{a + b + c} + \frac{b + c - a}{a + c - b}\right) = a,$$

d'où $\quad x^2 = \dfrac{a^2 - (b - c)^2}{2(b + c - a)} \quad$ et $\quad x = \pm\sqrt{\dfrac{a^2 - (b - c)^2}{2(b + c - a)}}.$

Pour avoir les valeurs de y et z il ne faut faire qu'une permutation tournante des lettres a, b etc ,

où $\quad y = \pm\sqrt{\dfrac{b^2 - (c - a)^2}{2(a + c - b)}} \quad$ et $\quad z = \pm\sqrt{\dfrac{c^2 - (a - b)^2}{2(b - a + c)}}.$

Natalie Ohotnikoff,
élève au gymnase Arsenieff à Moscou.

TROISIÈME PARTIE

REMARQUES

CONCERNANT LES FORMULES FONDAMENTALES DE LA TRIGONOMÉTRIE

par M. **Escary,** professeur au Lycée de Foix

(*Suite,* v. p. 161)

Nous allons la transformer en y introduisant la trigonométrie ; et à cet effet, nous allons suivre les variations du rapport $\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}$ quand l'angle $\alpha = \mathrm{AOB}$

α	$\frac{OB}{OA}$
0	+ 1
$\frac{\pi}{2}$	$\pm$ 0
π	— 1
$\frac{3\pi}{2}$	$\pm$ 0
2π	+ 1

varie de 0 à 2π. Ces variations, données par le tableau ci-contre, sont précisément celles du cosinus de l'angle α, et la géométrie permet ensuite de démontrer que ce même rapport est effectivement égal à $\cos \alpha$, car si du point O comme centre, avec l'unité pour rayon, on décrit un arc de cercle MN, les deux triangles semblables OMP et OAB dont la construction est toujours possible, donnent

$$\frac{OB}{OA} = \cos \alpha,$$

et l'identité (4) se transforme en la suivante :

$$OB = OA \cos \alpha, \tag{5}$$

qui se trouve ainsi rattachée aux variations des lignes trigonométriques, non seulement pour les quatre quadrants, mais encore pour toutes les valeurs imaginables d'un arc réel.

Maintenant, si dans l'identité (5) où la longueur OA est supposée constante et se comporter comme le rayon d'un cercle, lequel est toujours positif, on la suppose variable, et par suite susceptible de passer par zéro et de changer de signe, cela n'empêche pas cette même égalité (5) d'être une identité, à la condition d'y regarder cette longueur OA comme une quantité algébrique, et d'adopter par suite, pour la détermination du signe dans le second membre, la règle des signes de la multiplication algébrique. L'égalité (5) qui a de cette manière un sens arithmétique et à la fois algébrique, est une égalité de même espèce que

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

puisqu'elle ne renferme, comme cette dernière, que les principes dont on fait usage dans cette partie de l'algèbre qui a pour objet de former des identités.

De là résulte immédiatement, par une généralisation facile, l'identité suivante :

$$AB \cos \alpha + BC \cos \beta + CD \cos \gamma + DE \cos \delta + EF \cos \varepsilon = \tag{6}$$
$$A'B' \cos \alpha' + B'C' \cos \beta' + C'F \cos \gamma' = AF \cos \lambda$$

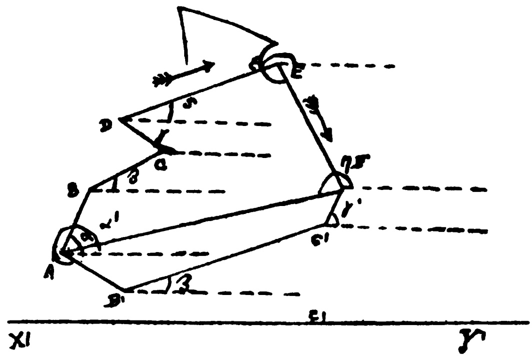
où α, β, γ, δ, 2, λ et α', β', γ' sont les angles dont les sommets supposés transportés au centre du cercle qui sert habituellement à définir et à étudier les lignes trigonométriques, sont tous comptés à partir de l'origine et dans le sens positif comme cela doit être, car la projection sur X'X de la ligne polygonale ABCDEF parcourue dans le sens indiqué par les flèches, est manifestement égale à celle de AF parcourue dans le sens AF, et de la ligne AB'C'F parcourue dans le sens AB'C'F. De là encore cette nouvelle identité :

$$AB \cos \alpha + BC \cos \beta + CD \cos \gamma + DE \cos \delta + EF \cos \varepsilon + FA \cos n = 0 \tag{7}$$

où la même ligne brisée est supposée fermée et parcourue dans le sens ABCDEF et dans laquelle les angles sont encore comptés de la même manière, c'est-à-dire dans le sens regardé habituellement comme positif, dans les variations des lignes trigonométriques.

Les deux identités trigonométriques (6) et (7), nées de la définition de la projection d'une droite sur une autre, rapprochée à la fois de l'arithmé-

tique, de la variation des lignes trigonométriques, et de la règle des signes de la multiplication algébrique, constituent les deux résultats généraux

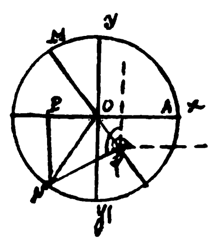


que nous voulions obtenir et que l'on trouve dans les différents ouvrages de trigonométrie qui ont paru depuis un certain nombre d'années.

Ces formules reçoivent des applications diveases et nombreuses, surtout dans le domaine de la géométrie. Nous allons appliquer la formule (6) à la détermination du cos et du sin de la somme de deux arcs a et b, connaissant les sin et les cos de ces deux derniers.

Soient le cercle O de rayon égal à 1. A l'origine de l'arc a et celle de la somme $a+b$; puis, supposons que l'on ait AM $= a$, MN $= b$, AMN $= a+b$.

Construisons le sin NP et le cos OP de l'arc $a+b$, et ensuite le sin NQ et le cos OQ de l'arc b, en prenant le point M pour origine de ce dernier arc. Les projections des deux contours OPN et OQN sur la direction Ox étant identiques à la projection de ON sur la même direction, sont identiques entre elles. Or, en observant que OP $= -\cos(a+b)$ est négatif, ainsi que OQ $= -\cos b$, la projection de OPN sur Ox se réduit à $-\cos(a+b)\cos\pi$, et celle de OQN à $-\cos b\cos(a+\pi) + \sin b \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)$.



En observant que l'on a $\cos\pi = -1$

$\cos(a+\pi) = -\cos a$, $\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin a$

on a finalement l'identité :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

En projetant les mêmes contours sur Oy, c'est-à-dire sur la direction positive de l'axe des y, le premier donne, en observant encore que NP $= -\sin(a+b)$ est négatif, $-\sin(a+b)\cos\pi$; et le second, $-\cos b \cos\left(a+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$; d'où l'on conclut :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

On constate aisément que, en appliquant la même formule (6), on retrouve constamment les identités (1), toujours avec la même forme et les mêmes signes pour toutes les valeurs réelles des arcs a et b.

Escary, professeur au lycée de Foix.

EXTRAIT D'UNE CORRESPONDANCE

Monsieur,

J'ai l'honneur de vous soumettre une remarque au sujet des puissances successives des nombres dont certaines lois vous ont été communiquées par l'un de vos correspondants.

La manière qui a servi à opérer étant toute de tâtonnements, il vaut mieux y substituer une méthode mathématique qui, étant tout à fait rigoureuse, satisfait entièrement l'esprit.

Voici comment on peut opérer :

1° Considérons d'abord la suite des nombres entiers à la puissance 1, et soit a un nombre quelconque on peut écrire : $a \quad a+1 \quad a+2 \quad a+n$.

Il s'agit de savoir si l'accroissement est constant pour tous les termes ; pour cela prenons la dérivée des nombres par rapport à a ; on aura :

$$\frac{da}{da} = 1 \qquad \frac{d(a+1)}{da} = 1 \qquad \frac{d(a+n)}{da} = 1.$$

Ainsi, pour obtenir un terme quelconque, il suffit d'ajouter 1 au précédent.

2° Soit maintenant la suite des carrés des nombres. Si a est un terme quelconque, on aura : $a^2 \quad (a+1)^2 \quad (a+2)^2 \quad (a+n)^2$.

La dérivée première de ces quantités sera :

$$\frac{da^2}{da} = 2a \qquad \frac{d(a+1)^2}{da} = 2(a+1) \qquad \frac{d(a+n)^2}{da} = 2(a+n).$$

Comme cette dérivée est encore fonction de a, il faut effectuer la dérivée seconde des quantités primitives

$$\frac{d^2a^2}{da^2} = \frac{d2a}{da} = 2 \times 1 \qquad \frac{d^2(a+n)^2}{da} = \frac{d2(a+n}{da} = 2 \times 1.$$

Ainsi, le terme constant 2×1 s'obtient au moyen d'une dérivée seconde et pratiquement, il faudra faire deux soustractions successives pour le trouver.

			1re Soustraction	2e Soustraction
Exemples	1	$1^2 = 1$		
			3	
	2	$2^2 — 4$		2
			5	
	3	$3^2 = 9$		2
			7	
	4	$4^2 = 16$		2
			9	

Examinons enfin le cas de la 3e puissance.

On aura la suite : $a^3 \quad (a+1)^3 \quad (a+2)^3 \quad (a+n)^3$.

La dérivée première de ces quantités sera

$$\frac{da^3}{da} = 3a^2, \qquad \frac{d(a+1)^3}{da} = 3(a+1)^2, \qquad \frac{d(a+n)^3}{da} = 3(a+n)^2.$$

Pour faire disparaître a, il faut prendre la dérivée seconde, puis la dérivée troisième, ce qui donne successivement :

Dérivée seconde :

$$\frac{d^2a^3}{da^2} = 3 \times 2 \times a \quad \frac{d^2(a+1)^3}{da^2} = 3 \times 2 \times (a+1) \quad \frac{d^2(a+n)^3}{da^2} = 3 \times 2 \times (a+n)$$

et dérivée troisième :

$$\frac{d^3a^3}{da^3} = 3 \times 2 \times 1; \quad \frac{d^3(a+1)^3}{da^3} = 3 \times 2 \times 1; \quad \frac{d^3(a+n)^3}{da^3} = 3 \times 2 \times 1.$$

Le terme constant est donc $3 \times 2 \times 1$; comme il faut recourir à une dérivée troisième pour l'obtenir, il faudra faire une triple soustraction.

	nombres	cubes	1re soustraction	2e soustraction	3e soustraction
Exemples	1	$1^3 = 1$			
			7		
	2	$2^3 = 8$		12	
			19		6
	3	$3^3 = 27$		18	
			37		6
	4	$4^3 = 64$		24	
			61		6
	5	$5^3 = 125$		30	
			91		6

En général, pour la n^{ieme} puissance, il faudra prendre la n^{ieme} dérivée ce qui donnera le produit : $1.2.3.4.\ (n-1)n$ pour terme constant et pratiquement, le nombre des soustractions sera égal à n.

Henri Gay-Lancermin.

SOLUTION CORRIGÉE DE LA QUESTION 763

Une confusion ayant eu lieu dans la solution de la question 763 publiée dans ce journal, page 158, voici la solution exacte :

On sait que le centre N du cercle inscrit au triangle complémentaire de F est le centre du cercle orthogonal aux trois cercles exinscrits. Soit O le centre du cercle circonscrit à F, G le centre de gravité, H l'orthocentre et I le centre du cercle inscrit ; on sait que O, G, ω, H sont en ligne droite et de même N, G, I. De plus, ON est parallèle à HI, et on a aussi IG $=$ 2GN, HI $=$ 2ON, donc $\omega N = \frac{1}{2}$ OI, ω étant le centre du cercle des neuf points.

Or, on a $\quad OI = \sqrt{R(R-2r)},$

donc $\quad \omega N = \frac{1}{r}\sqrt{R(R-2r)}.$ **Jorge F. d'Avillez.**

Pour les quelques questions qui suivent, le lecteur est prié de faire la figure et de se rapporter aux énoncés dans le Journal de Mathématiques élémentaires.

SOLUTION DE LA QUESTION 733

par **L'Huillier**

1° On a $\frac{Dd}{OM_1} = \frac{AD}{AM_1} = \frac{MM_1}{2OM_1}$ d'où $Dd = a$. Le lieu est la parallèle à Ox à la distance a.

2° On a
$$\frac{Ee}{OM'_1} = \frac{Ae}{OA} = \frac{AE}{AM'_1} = \frac{MM'}{MM'_1},$$
ou en supprimant le 3e rapport $\frac{Ee}{OM + 2a} = \frac{Ae}{a} = \frac{a}{OM + a}\,\frac{Ae + a}{OM + 2a},$

donc
$$Ee = Ae + a = Oe.$$

3° Projetant a sur Ox au point a_1, on a $Aa_1 = aG - a$, $aa_1 = OG$ et le triangle Aaa_1 donne $(\overline{aG} - a)^2 + \overline{OG}^2 = \overline{aA}^2 + \overline{aM}^2 = \overline{aG}^2 + a^2.$

ou
$$\overline{OG}^2 = 2a.aG.$$

Soit α le milieu de OA, on a : $\overline{aO}^2 + \overline{aA}^2 = 2\overline{a\alpha}^2 + \frac{a^2}{2};$

or $\overline{aO}^2 = \overline{OG}^2 + \overline{aG}^2 = \overline{AG}^2 + 2a.\overline{aG}.\overline{aA}^2 = \overline{aM}^2 = \overline{aG}^2 + a^2.$

et
$$\overline{aO}^2 + \overline{aA}^2 = 2\overline{a\alpha}^2 + \frac{a^2}{2} = 2\overline{aG}^2 + 2a.aG + a^2,$$

et enfin
$$\overline{a\alpha}^2 = \left(\overline{aG}^2 + \frac{a}{2}\right)^2.$$

d'où
$$a\alpha = aG + \frac{a}{2}.$$

Le lieu est donc une parabole de foyer α ayant pour tangente au sommet Oy.

4° AO' et MB sont respectivement symétriques de AO et MO par rapport à AM, donc AO' est perpendiculaire sur MB et égale à a. On a
$$O'M.O'B = a^2 \quad \text{ou} \quad OM.GC = a^2 = a.GM \quad \frac{OM}{GM} = \frac{a}{GC}.$$

Le point A_1 est fixe et $OA_1 = a$. **H. L'Huillier.**

SOLUTION DE LA QUESTION 735

par **L'Huillier**

Il faut trouver un point C tel que PC + QC soit maximum. La question se ramène immédiatement à trouver le point de contact d'une ellipse de foyers P et Q tangente au cercle. Alors CO est bissectriee de l'angle PCQ et la tangente en C rencontre AB en T conjugué harmonique de O par rapport aux points P et Q.

Le problème n'est possible que si le point T est en dehors de la demi-circonférence, c'est-à dire si $\frac{1}{OP} + \frac{1}{OQ} < \frac{2}{R}$.

Remarque. — J'ai pris P et Q de part et d'autre de O, sinon le point cherché serait évidemment une des extrémités du diamètre AB. Dans le cas où P et Q sont d'un même côté de O, le problème (dont la solution est identique

à la précédente, en remplaçant l'ellipse par une hyperbole) serait : Trouver un point C tel que la différence de ses distances aux points P et Q soit minimum.

H. L'Huillier.

QUESTION 737 (*J. M. E.*, p. 143)

Solution

Les deux forces BD *et* CD *ont pour résultante* 2A'D. *Donc en* A' *nous aurons deux forces* : 2DO *et* 2A'D. *On voit facilement que leur résultante sera* 2A'O. *Les neuf forces se réduisent donc à trois* : 2A'O, 2B'O, 2C'O.

Cherchons la résultante des forces OA', OB', OC'. Formons le contour $OA'B'_1C'_1$. OC'_1 est la résultante. OC'_1 passe visiblement par le milieu de B'_1C', donc pour le centre de gravité G de OB'_1C'. Or, la médiane passant par C' dans OB'_1C' coïncide avec celle passant par C' dans A'B'C' puisque OB'_1 et A'B' se coupent en leurs milieux. Donc G est le centre de gravité de A'B'C' et aussi de ABC. De plus, $OC'_1 = 3OG$.

Donc la résultante des neuf forces considérées sera dirigée suivant GO et aura une longueur égale à GOG.

Pour que les forces se fassent équilibre il faut que O et G coïncident.

Francis Dauzats.

QUESTION 738 (*J- M. E.*, p. 143)

Solution

En joignant tous les points A *au point* B *on a un système de forces concourantes dont la résultante passe par* B *et par le centre des moyennes distances des points* A (*ce qui est facile à établir*). *En faisant de même pour tous les points* B *nous aurons une série de forces concourantes au centre* α *des points* A.

Ces forces ont elles-mêmes une résultante passant par le centre des moyennes distances β des points B. La résultante agira donc suivant $\alpha\beta$. Elle sera égale à la somme algébrique des projections des forces sur $\alpha\beta$.

Or, si $aa'a''$... $bb'b''$ sont les projections des points sur $\alpha\beta$ la somme des projections sur $\alpha\beta$ de ABA'BA''B... est $m.\alpha b$ si m est le nombre des points A. Donc la somme des projections de toutes les forces sera : $m.\alpha b + m.\alpha b' + m.\alpha b'' + ...$

Or, $\alpha b + \alpha b' + \alpha b''... = n.\alpha\beta$ si n est le nombre des points B.

Donc la résultante sera une force appliquée suivant $\alpha\beta$ et égale à mn fois cette distance.

Francis Dauzats.

QUESTION 748 (*J. M. E.*, p. 168)

Solution, par Francis Dauzats

Soient H *l'orthocentre de* ABC, B'C' *les pieds des hauteurs issues de* B *et* C *et* I *le milieu de* AH.

Le quadrilatère complet AB'HC'BC a les milieux IMN de ses diagonales en ligne droite. Donc MN ne passe par A que si elle se confond avec la hauteur qui devient alors médiane. Le triangle est par suite isoscèle.

Fr. Dauzats.

L'aire du triangle ayant pour sommets les projections du centre de gravité sur les côtés est égale à $\frac{4S^3(a^2+b^2+c^2)}{9a^2b^2c^2}$, a,b, c *et* S *désignant les côtés et l'aire du triangle donné.* **E.-N. Barisien.**

Soit G le centre de gravité, A', B', C' les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés; les angles A et B'GC' étant supplémentaires, les triangles B'GC' et ABC donnent $\frac{B'GC'}{S} = \frac{GB'.GC'}{bc}$.

Or, on a, en représentant par h_a, h_b, h_c les hauteurs du triangle

$$GA' = \frac{h_a}{3} \quad GB' = \frac{h_b}{3} \quad GC' = \frac{h_c}{3} \quad \text{et} \quad 2S = ah_a = bh_b = ch_c,$$

donc $\frac{B'GC'}{S} = \frac{4S^2}{9b^2c^2}$ et de même $\frac{C'GA'}{S} = \frac{4S^2}{9a^2c^2}$ $\frac{A'GB'}{S} = \frac{4S^2}{9a^2b^2}$

donc $$\frac{A'B'C'}{S} = \frac{4S^2}{9}\left(\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{a^2b^2}\right) = \frac{4S^2}{9}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}\right).$$

et finalement $$A'B'C' = \frac{4S^3}{9}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}\right).$$

Jorge F. d'Avillez.

Soient A', B', C' *les pieds des bissectrices intérieures du triangle* ABC; O *le point de concours de ces bissectrices*; A", B", C" *les milieux de* AA', BB', CC'; S *et* 2p *la surface et le périmètre du triangle* ABC; Σ *la surface du triangle* A"B"C", *Démontrer les relations*

$$\Sigma = \frac{AA'.BB'.CC'}{16p} = \frac{p^3}{2S^2}.OA''.OB''.OC''.$$

E.-N. Barisien.

La surface du triangle Σ par rapport au triangle de référence ABC, est donnée par la formule $\Sigma = \frac{abc}{8S^2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

où (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) sont les coordonnées normales des trois sommets A", B", C".

Or, on a $x_1 = \frac{S}{a}$ $y_1 = z_1 = \frac{S}{b+c}$ $y_2 = \frac{S}{b}$ $x_2 = z_2 = \frac{S}{a+c}$

$$z_2 = \frac{S}{c} \quad x_3 = y_3 = \frac{S}{a+b},$$

donc $$\Sigma = \frac{abc}{8S^2}\begin{vmatrix} \frac{S}{a} & \frac{S}{b+c} & \frac{S}{b+c} \\ \frac{S}{a+c} & \frac{S}{b} & \frac{S}{a+c} \\ \frac{S}{a+b} & \frac{S}{a+b} & \frac{S}{c} \end{vmatrix}$$

ou encore
$$\Sigma = \frac{abcS}{8}\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{b+c} \\ \frac{1}{a+c} & \frac{1}{b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant, on trouve après réductions

(1)
$$\Sigma = \frac{abcS}{2(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

Si l_a, l_b, l_c sont les bissectrices intérieures de ABC, on a la formule connue
$$S = \frac{l_a l_b l_c (b+c)(c+a)(a+b)}{8abcp}$$

donc
$$AA'.BB'.CC' = \frac{8abcpS}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

En comparant cette formule avec (1), on trouve

(2)
$$\Sigma = \frac{AA'.BB'.CC'}{16p}.$$

Or,
$$OA'' = OA - \frac{AA'}{2} = \frac{l_a(b+c)}{2p} - \frac{l_a}{2} = \frac{l_a(b+c) - pl_a}{2p}$$

et encore
$$OA'' = \frac{l_a(b+c-p)}{2p} = \frac{l_a(p-a)}{2p}.$$

On aura de même $OB'' = \dfrac{l_b(p-b)}{2p}$ $\quad OC'' = \dfrac{l_c(p-c)}{2p}$

et
$$OA''.OB''.OC'' = \frac{l_a l_b l_c (p-a)(p-b)(p-c)}{8p^3}.$$

Mais
$$(p-a)(p-b)(p-c) = pr^2$$

donc
$$OA''.OB''.OC'' = \frac{l_a l_b l_c r^2}{8p^2}.$$

On aura alors

(3)
$$\frac{p^3}{2S^2}.OA''.OB''.OC'' = \frac{l_a l_b l_c}{16p} = \Sigma.$$

Jorge F. d'Avillez.

QUESTIONS PROPOSÉES

Soient A′, B′, C′ les pieds des hauteurs d'un triangle ABC et H son orthocentre. On prend le symétrique A″ de A′ par rapport au milieu de BC, et les points analogues B″ et C″. Montrer que les droites AA″, BB″, CC″ concourent en un même point et calculer les distances de ce point aux trois côtés du triangle ABC. **(E.-N. Barisien).**

Soit ABC un triangle donné dont les côtés sont a, b, c ($a > b > c$), S l'aire, r et R les rayons des cercles inscrit et circonscrit.

Représentons par S_1 l'aire du triangle formé par l'orthocentre et par les centres des cercles inscrit et circonscrit. Soient : Σ l'aire du triangle dont les sommets sont les pieds des bissectrices intérieures, Σ_1, Σ_2, Σ_3 les aires

des triangles dont les sommets sont le pied d'une bissectrice intérieure et les pieds des deux bissectrices extérieures issues des deux autres sommets.

Démontrer la relation $$\frac{\Sigma}{\Sigma_1 \cdot \Sigma_2 \cdot \Sigma_3} = \frac{r^2 S_1^2}{R^2 S^4}.$$

(**Jorge F. d'Avillez**).

Soit donné un triangle équilatéral et une droite Δ située dans son plan ; si α, β, γ sont les distances des sommets à la droite, on a la relation

$$\alpha(\alpha - \beta) + \beta(\beta - \gamma) + \gamma(\gamma - \alpha) = \frac{3}{4} a^2$$

a étant le côté du triangle. (**Jorge F. d'Avillez**).

Soit ABC un triangle donné, $AA' = l_a$ la bissectrice intérieure de l'angle A, l'_a, l''_a les segments IA, IA' déterminés sur cette bissectrice par le centre I du centre inscrit, r le rayon de ce cercle. Démontrer les relations

$$\sum \frac{bc}{l_a} \cos \frac{A}{2} \cos A = p \qquad \frac{l_a}{l'_a l''_a} \cos \frac{A}{2} = \frac{2p^2}{abc}.$$

Jorge F. d'Avillez.

Arithmétique. — Si $N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots s^{\sigma}$ démontrer que la somme des exposants qui figurent dans tous les diviseurs de N, décomposé en facteurs premiers est égale à :

$$\frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\ldots(\sigma + 1)(\alpha + \beta + \ldots + \sigma)}{2}.$$

Fontebasso.

(*Supplemento al periodico di mathematica*).

Démontrer que pour n entier et positif l'expression : $(3^{2n}.5^{4n+2} + 1)(8^{3n+2} + 8^{3n+1} + 1)$ est divisible par 1898. **Castelli.**

(*Supplemento al periodico di mathematica*).

Trigonométrie. — Démontrer la relation

1° $$\sin^2 a + \sin^2(a + h) + \sin^2(a + 2h) + \ldots + \sin^2[a + (n - 1)h]$$
$$= \frac{n}{2} - \frac{\sin nh \cos [2a + (n - 1)h]}{\sin h}.$$

2° $$\cos^2 a + \cos^2(a + h) + \cos^2(a + 2h) + \ldots + \cos^2(a + (n - 1)h)$$
$$= \frac{n}{2} + \frac{\sin nh \cos [2a + (n - 1)h]}{\sin h}.$$

Celestri.

(*Supplemento al periodico di mathematica*).

Le Directeur-gérant,

GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.